مبادئ الاستاتيكا الحديثة

تأليف
دكتور مهندس/ محمد عثمان زكريا
أستاذ مساعد



الطبعة الأولى
١٤١٣هـ-١٩٩٣م

دار النشر للجامعات المصرية - مكتبة الوفاء
٤١ ش شريف ت: ٣٩٢١٩٩٧ / ٣٩٣٤٦٠٦

المقـــدمة

يتعرض هذا الكتاب للفرع الأول من علم **الميكانيكا** وهو الإستاتيكا .

ونحاول معالجة المواضيع المختلفة للإستاتيكا بطريقة المتجهات مما يجعل التحليل أكثر سهولة ومتمشيًا مع الطرق الحديثة .

والطريقة المتبعة فى هذا الكتاب هى الشرح المبسط للنظريات المختلفة مع التوضيح فى نهاية كل باب بالعديد من الأمثلة المحلولة مع إعطاء القارىء بعض التمارين المبسطة ليحدد مدى إستيعابه للموضوع .

وفى الباب الأخير رأينا إعطاء مجموعة مختارة من المسائل المحلولة والتى تشمل كل أبواب الكتاب لتكون بمثابة مراجعة شاملة وبذلك يصل عدد المسائل المحلولة بهذا الكتاب إلى ما يقرب سبعين مسألة .

وإننا نعتقد أن طريقة هذا الكتاب تخاطب طلاب كليات الهندسة والعلوم بطريقة تلائم المناهج بتلك الكليات وفى نفس الوقت تتمشى مع الأسلوب الحديث للتعليم .

هذا ويحاول المؤلف أن يقدم مادة الإستاتيكا باللغة العربية وهى محاولة تؤكد – بلا جدال – إمكانية تعريب المواد العلمية حتى يعود للغة العربية مجدها الضائع وهى أيضًا محاولة لتقديم المادة للطالب بلغة أقرب إلى فهمه .

وبإذن الله تعالى سوف نُتْبع هذا الجزء الخاص بعلم الإستاتيكا بالجزء الثانى الخاص بعلم الديناميكا .

ونرجو فى النهاية أن تكون هذه المحاولة المتواضعة مقبولة لدى القارىء العربى .

الباب الأول

المتجهـــات

1,1 – تعريفـــات :

المتجه هو خط مستقيم A B يبدأ من نقطة مختارة تسمى نقطة الأصل A وينتهى بنقطة النهاية B . ويحتاج المتجة إلى أربعة عناصر ليكون معرفاً تعريفاً كاملًا :

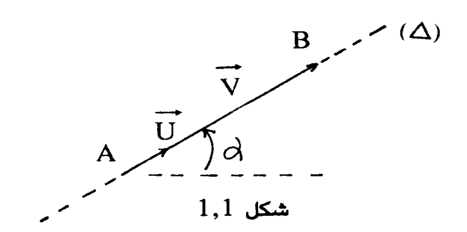
(أ) نقطة الأصل أو نقطة التأثير A .

(ب) اتجاه : وهو اتجاه الخط الذى يمثله وليكن المحور (Δ) .

(جـ) قيمته : وهو مقياس هذا المتجه أو قيمته المطلقة .

(د) مساره : أى نقطة بدايته ونهايته من A إلى B ، وليس من B إلى A .

هذا ويمكن تعريف زاوية ميل هذا المتجه على محور معلوم وليكن المحور الأفقى ، على أن تقاس هذه الزاوية من المحور إلى المتجهِ فى الاتجاه المثلثى ولتكن الزاوية α انظر شكل 1,1 .



شكل 1,1

فى حالة تعريف الزاوية – كما ذكرنا يمكن الاستغناء عن العنصرين الثاني والرابع أعلاه حيث أن اتجاه الزاوية وقيمتها يوضحان ويحددان اتجاه ومسار المتجه .

ويرمز للمتجه فى هذا الفصل بالرمز $\vec{V}$ ، أما قيمته فتكتب $|\vec{V}|$ وهى

أنواع المتجهات :

المتجه الحر : وفيه يكون الاتجاه والقيمة معرفتين فى حين المسار ونقطة الأصل غير محددتين

المتجه المنزلق : نقطة التأثير (نقطة الأصل أو البداية) هى فقط التى لم تحدد .

المتجه المتصل : وفيه الأربع عناصر محددة .

متجه الوحدة: وهو المتجه الذى قيمته تكون الوحدةويرمز له بالرمز $\vec{U}$

ويمكن لمتجه ما $\vec{V}$ الموازى لمتجه الوحدة $\vec{U}$ (انظر شكل 1,1) أن يكتب في الصورة :

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{U} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.1)$$

1,2 – إسقاط المتجه :

إسقاط المتجه $\vec{V}$ يكون على المحور (Δ)، شكل 1,2، كما يلى :

شكل 1,2

$$A_1B_1 = |\vec{V}| . \cos \alpha \quad .... \quad (1.2)$$

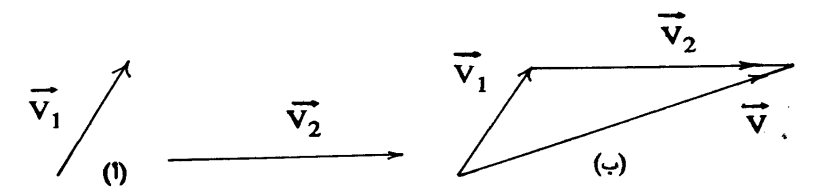
أى أن قيمة المسقط A_1 , B_1 يكون مساوياً لقيمة المتجه مضروباً فى $\cos \alpha$. حيث α هى الزاوية ما بين الاتجاه الموجب لكل من المحور والمتجه ، وتقاس كما سبق فى الاتجاه المثلثى .

إثبات المعادلة (1.2) أعلاه واضح من هندسة الشكل 1,2 .

1,3 – العمليات المختلفة على المتجهات :

1,31 – جمع المتجهات :

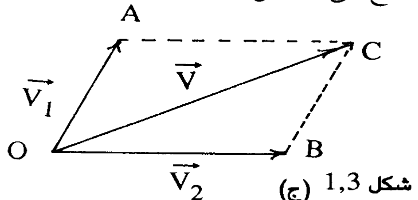
حاصل جمع المتجهات $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شكل 1,3 ا هو المتجه $\vec{V}$ الذى يصل ما بين نقطة بداية المتجه $\vec{V}_1$ ونقطة نهاية المتجه $\vec{V}_2$ ، وتعرف هذه القاعدة بقاعدة المثلث انظر شكل 1,3 ب .



هذا ويمكن فى حالة عملية الجمع تطبيق قاعدة متوازى الأضلاع بالشكل 1,3 حـ حيث يكون حاصل جمع $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ هو المتجه الذى يمثل قطر متوازى الأضلاع المبنى على المتجهين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.

ويلاحظ أنه لو استبدل مكان المتجه $\vec{V}_2$ من الوضع OB إلى الوضع AC؛ لحصلنا على قاعدة المثلث أعلاه .

ويمكن كتابة قاعدة الجمع على الشكل التالى :



شكل 1,3 (ج)

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad .... (1.3)$$

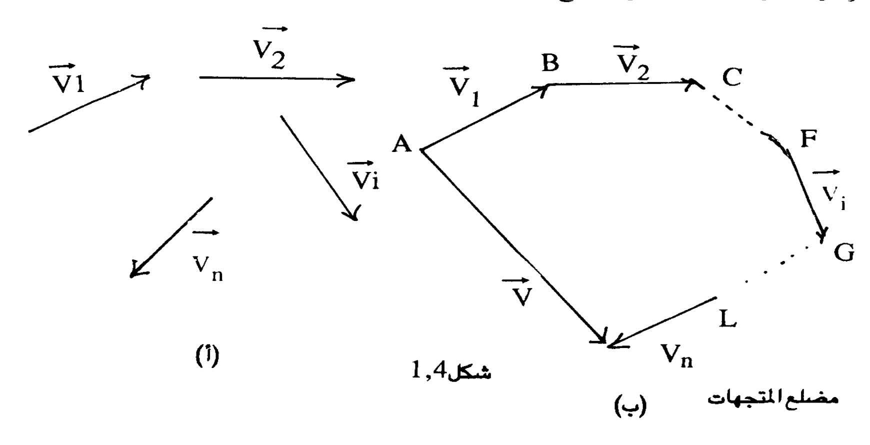
ويمكن فى حالة جمع متجهين أن تطبق قاعدة التبديل حيث :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 = \vec{V} \quad .... (1.4)$$

فى حالة جمع مجموعة من المتجهات يتغير المثلث أعلاه فنحصل فى هذه الحالة على مضلع . فلنفرض أن لدينا مجموعة من المتجهات كما بالشكل 1,4 أ :

$$\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2 ,.........., \vec{V}_i ,.........., \vec{V}_n$$

والمراد هو إيجاد حاصل الجمع بيانياً .



شكل 1,4

نختار نقطة ما : مثل A ، شكل 1,4 ، ومنها نبدأ فى عمل موازٍ للمتجه الأول $\vec{V}_1$ ، وذلك بمقياس رسم مناسب فنحصل على AB ، ومن B نرسم الموازى BC للمتجه $\vec{V}_2$ بنفس مقياس الرسم ، وهكذا حتى آخر متجه $\vec{V}_n$ الذى ينتهى عند النقطة O . المتجه الواصل ما بين النقطتين A إلى O أى $\vec{AO}$ يسمى المتجه $\vec{V}$ وهو حاصل الجمع ويعرف بالمحصلة بقياس $\vec{AO}$ وضربه فى مقياس الرسم نحصل على القيمة ، ويمكن أن نكتب المعادلة الاتجاهية :

$$\vec{V} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + ... + \vec{V}_i + ... + \vec{V}_n \quad (1.5)$$

$$= (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + ... + \vec{V}_i + ... + \vec{V}_n$$

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \quad .... (1.6)$$

هذا ويمكن تطبيق قواعد الجمع بالأقواس على جمع المتجهات كما بالمعادلة 1.5 .

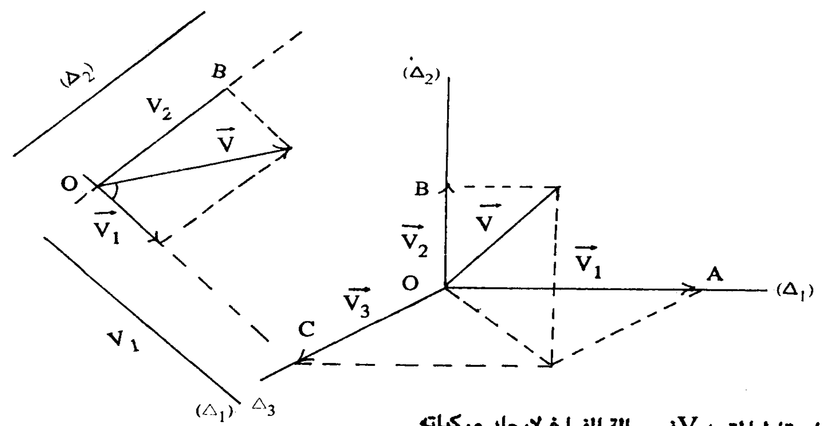
1,32 – الفارق بين متجهين :

الفارق بين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ (وليس بين $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_1$) هو المتجه $\vec{V}$ الذى يجب إضافته إلى $\vec{V}_2$ للحصول على $\vec{V}_1$ ، انظر شكل 1,5

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad .... (1.7)$$

1,33 – تحليل المتجه أو إيجاد مركباته :

يقصد بتحليل المتجه : إيجاد مكوناته الأساسية – مركباته – بالنسبة إلى محورين إذا كان المتجه فى مستوى، أو بالنسبة لثلاثة محاور إذا كان المتجه فى الفراغ، شكل 1,6 .



إسقاط المتجه V في حالة الفراغ لإيجاد مركباته

إسقاط المتجه V فى حالة المستوى لإيجاد مركبتيه

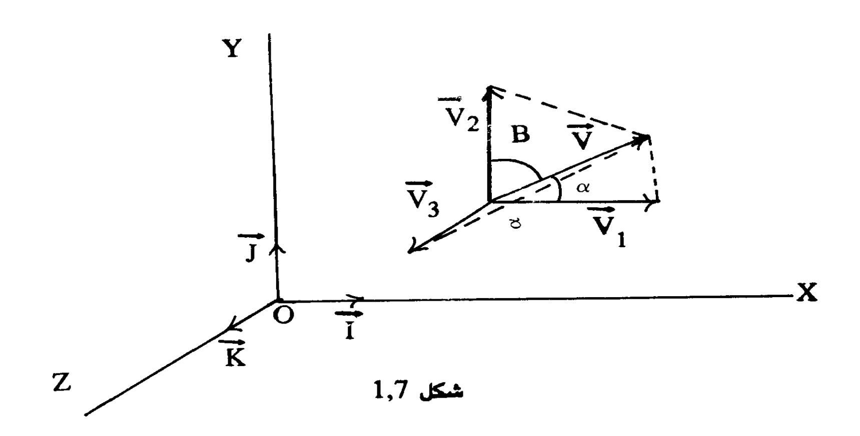
شكل 1,6

فى الواقع عملية التحليل لإيجاد المركبات هى عملية إسقاط على المحاور . فإذا فرضنا أن الزوايا التى يصنعها المتجه $\vec{V}$ مع المحاور هى α ، β ، γ مع x ، y ، z على الترتيب فإن :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}_1 = \vec{V} \, . \text{Cos}\, \alpha \\ \vec{V}_2 = \vec{V} \, . \text{Cos}\, \beta \\ \vec{V}_3 = \vec{V} \, . \text{Cos}\, \gamma \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.8)$$

حيث $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ هى مركبات المتجه $\vec{V}$ على x ، y ، z على الترتيب انظر شكل 1,7

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.9)$$



شكل 1,7

فإذا فرضنا أن $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ هى متجهات الوحدة تبعاً للمحاور x، y، z على الترتيب ، فإننا يمكننا أن نكتب :

$$\vec{V}_1 = X\ \vec{i}\ ,\ \vec{V}_2 = Y\ \vec{J}\ ,\ \vec{V}_3 = Z\ \vec{K} \quad .... (1.10)$$

حيث X ، Y ، Z هى قيم $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ ويمكن الحصول عليها من المعادلات التالية :

$$\left.\begin{aligned} X &= |\vec{V}|\ .\ \text{Cos}\ \alpha \\ Y &= \quad\ .\ \text{Cos}\ \beta \\ Z &= |V|\ .\ \text{Cos}\ \gamma \end{aligned}\right\} \quad .... (1.11)$$

بالتعويض عن كل من $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ من المعادلة (1.10) بالمعادلة (1.9) نجد :

$$\vec{V} = X\ \vec{i} + Y\ \vec{J} + Z\ \vec{K} \quad .... (1.12)$$

وتعرف المعادلة (1.12) بالمعادلة التحليلية للمتجه $\vec{V}$.

لندرس الآن حالة وجود مجموعة من المتجهات ، ونحاول إيجاد المعادلة التحليلية العامة لها .

لنفرض أن المتجهات هى : $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، .... ، $\vec{V}_i$ ، .... ، $\vec{V}_n$ وهى معرفة بواسطة قيم مساقطها على المحاور الثلاثة x ، y ، z كما يلى :

$$\vec{V}_1 (X_1 , Y_1 , Z_1) ,...., \vec{V}_2 (X_2 , Y_2 , Z_2) ,....,$$
$$\vec{V}_i (X_i , Y_i , Z_i) ,...., \vec{V}_n (X_n , Y_n , Z_n)$$

والمطلوب إذاً هو إيجاد $\vec{V}$ حيث :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \text{ .... } (1.13)$$

بالتعويض عن $\vec{V}_i$ فى المعادلة (1.9) :

$$\vec{V}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{J} + Z_i \vec{K}$$

وعن طريق المعادلة (1.13) نجد :

$$\vec{V} = (\Sigma X_i) \vec{i} + (\Sigma Y_i) \vec{J} + (\Sigma Z_i) \vec{K} \text{ ....} (1.14)$$

حيث إن القيم ما بين الأقواس تمثل مساقط $\vec{V}$ على المحاور الثلاثة :

$$X = \Sigma X_i , Y = \Sigma Y_i , Z = \Sigma Z_i \text{ .... } (1.15)$$

ويمكن إيجاد قيمة $\vec{V}$ من المعادلة التالية :

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ .... } (1.16)$$

أما اتجاهات $\vec{V}$ أى الزوايا التى يصنعها مع المحاور الثلاثة فهى :

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\\ \cos\beta &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.17)$$

وتعرف المعادلات (1.17) باتجاهات جيوب تمام المتجه $\vec{V}$

المعادلات أعلاه يمكن تبسيطها فى حالة وجود المتجه $\vec{V}$ بالمستوى نجد :

$$\left.\begin{aligned}X &= X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n\\ Y &= Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.18)$$

ولا داعى للمعادلة الثالثة حيث إن المتجه فى المستوى X , Y وبالتالى فمركبته الثالثة تكون صفرا .

وتكون المحصلة فى هذه الحالة :

$$\vec{V} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.19)$$

وقيمتها :

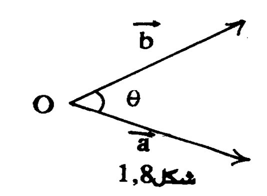
$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.20)$$

ولتحديد اتجاهاتها فيكفى فى هذه الحالة معرفة الزاوية التى تصفها مع المحور OX وهى :

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.20)$$

(1.34) الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان لدينا المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بالشكل 1,8 ، بينهما زاوية θ ، وأريد إيجاد حاصل ضربهما القياسى فإننا نعرفه بالمعادلة التالية :



شكل 1,8

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos \Theta \qquad \text{......................... (1.21)}$$

وتكون نتيجة الضرب عدداً (سالباً أو موجباً) .

1.34 خصائص هامـــة :

– فى حالة ما إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين فيكون حاصل ضربهما القياسى مساوياً لحاصل ضرب قيمتهما الجبرية :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| . |\vec{b}| \qquad \text{............ (1.22)}$$

– فى حالة تعامد $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يكون حاصل ضربهما القياسى صفراً ومنها نستنتج :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \ , \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \ , \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \qquad \text{........(1.23)}$$

– فى حالة ما إذا كان المتجهان متساويين يكون الحاصل هو :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \qquad \text{............ (1.24)}$$

وبناء على ذلك فإننا نحصل على العلاقات التالية :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \ , \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \ , \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \qquad \text{... (1.25)}$$

– حاصل الضرب القياسى لمتجهين يكون تبادلياً ·

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

– يمكن أيضاً تطبيق قواعد الجمع بالأقواس :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{C}$$

– وكذلك نطبق عليه قاعدة ضرب الأقواس ، وذلك إذا ما ضرب فى عدد قياسى

$$m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\,\vec{b})$$

حيث m عدد قياسى .

فى حالة ما إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ معرفين بالمركبات على المحاور الثلاثة ، فإن حاصل ضربهما القياسى يكون :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \text{.................... (1.26)}$$

حيث :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\ , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

وللحصول على المعادلة (1.26) يجب أن يتذكر القارىء الخصائص بالمعادلات (1.23) و (1.25) .

بتطبيق المعادلة (1.21) وبالتعويض عن $\vec{a} \cdot \vec{b}$ من المعادلة (1.26) وبإيجاد قيمتهما من (1.16) نجد :

$$\cos\Theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a^2x + a^2y + a^2z} \cdot \sqrt{b^2x + b^2y + b^2z}} \qquad (1.27)$$

المعادلة (1.27) يمكن استخدامها لإيجاد الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

من المعادلة (1.27) يتضح أن شرط تعامد متجهين هو :

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad \text{.....................} (1.28)$$

1.35 الضرب الاتجاهى لمتجهين :

حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهـــين $\vec{a}$, $\vec{b}$ هو المتجه $\vec{V}$ حيث : (انظر شكل 1,9)

– اتجاه $\vec{V}$ يكون عمودياً على المستوى المكون من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ويمكن معرفة مساره بتطبيق قاعدة اليد اليسرى .

– قيمة $\vec{V}$ تكون

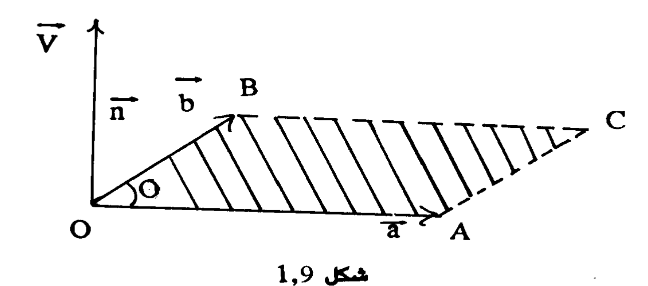
$$|\vec{V}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \text{Sin } \Theta \qquad \text{............} (1.29)$$

ويمكن أن تكتب

$$\vec{V} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}| \text{ Sin } \Theta \ \vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ وحدة متجه فى اتجاه $\vec{V}$



شكل 1,9

1.351 خصائص هامة :

– حاصل الضرب الاتجاهى يساوى مساحة متوازى الأضلاع المبنى على المتجهين شكل 1,9 . وهذا واضح من المعادلة (1.29) .

– لو كان المتجهان متوازيان يكون حاصل ضربهما الاتجاهى صفراً.

– المتجهان المتطابقان يكون حاصل ضربهما صفراً (انظر الإثبات فى نهاية هذا البند) :

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.30)$$

– الضرب الاتجاهى لا تطبق عليه قاعدة التبادل فى الضرب ، وبالتالى يمكننا أن نكتب :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.31)$$

– يمكن تطبيق قواعد الجمع بالأقواس فمثلاً :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.31)$$

يمكن تطبيق قاعدة الضرب بالأقواس إذا كان الضرب بالنسبة لعدد قياسى :

$$m (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (m \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m \vec{b})$$

بتطبيق المعادلات (1.30) و (1.31) يمكننا أن نكتب :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0 \ , \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = 0 \ , \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= - \vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= - \vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= - \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.33)$$

أما الصورة العامة لحاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فيمكن الحصول عليها بإجراء عملية الضرب المباشر لمركباتهما مع الأخذ فى الاعتبار كل من المعادلتين (1.32) , (1.33) أى :

$$\vec{\nu} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y j + a_z x \vec{k}) \wedge$$

$$(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z + \vec{k})$$

ويكون حاصل الضرب الاتجاهى :

$$\vec{\nu} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_\chi - a_\chi b_z)\vec{j} + (a_\chi b_y - a_y b_\chi)\vec{k} \quad (1.34)$$

ويمكن وضع المعادلة (1.34) فى صورة المحدد التالى :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_\chi & a_y & a_z \\ b_\chi & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.35)$$

إثبات المعادلة (1.30) أعلاه :

بفرض أن : $\vec{a} = a_\chi \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

وبالتعويض عن حاصل الضرب $\vec{a} \times \vec{a}$ فى المعادلة (1.34) نجد :

$$\vec{\nu} = \vec{a} \wedge \vec{a} = (a_y a_z - a_z a_y)\vec{i} + (a_z a_\chi - a_\chi a_z)\vec{j}$$

$$+ (a_\chi a_y - a_y a_\chi)\vec{k} = \vec{o}$$

وهو ما يثبت المعادلة (1.30) :

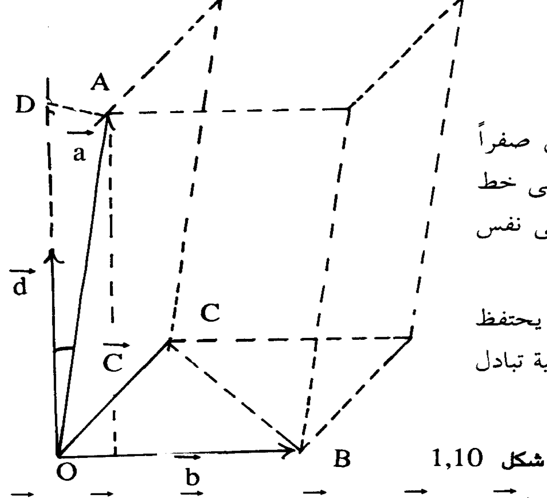
1.36 – حاصل الضرب المختلط لثلاثة متجهات :

تعريف : يعرف حاصل الضرب المختلط للمتجهات الثلاثة الحرة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ بأنه الضرب القياسى للمتجه $\vec{a}$ فى حاصل الضرب الاتجاهى $\vec{b} \wedge \vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} = |\vec{a}| \cdot |\vec{d}| \cos\Phi = 2.\triangle OBC.h \quad (1.36)$$

حيث : $\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c}$

وتكون قيمة حاصل الضرب المختلط مساوية لحجم الشكل المبنى على المتجهات الثلاثة كما بالشكل 1.10 .



شكل 1,10

1.361 خواص هامة :

يكون حاصل الضرب السابق صفراً إذا كان متجهان من الثلاثة على خط واحد ، أو الثلاثة متجهات فى نفس المستوى .

حاصل الضرب المختلط يحتفظ بنفس القيمة إذا ما أجرينا عملية تبادل دائرى للمتجهات .

1.37 $\vec{a} \, (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \, . (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \, (\vec{a} \wedge \vec{b})$

ولكن يجب أن يراعى كذلك التبادل فى عمليات الضرب القياسى والضرب الاتجاهى :

$$\vec{a} \, (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \, . \, \vec{c} = (\vec{a} \, , \vec{b} \, , \vec{c})$$

ويمكن أن يكتب حاصل الضرب المختلط فى صورة المحدد :

$$\vec{a} \, . (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1.37 - حاصل الضرب الاتجاهى لثلاثة متجهات (ضرب اتجاهى مضاعف) :

ويكتب على الصورة :

$$\vec{w} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{ab} & \vec{ac} \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.38)$$

1.4 أمثلة محلولة :

١ – إذا علم أن :

$$\vec{A} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{B} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$
$$\vec{C} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

فالمطلوب إيجاد مسقط $(\vec{A} + \vec{C})$ على $\vec{B}$.

الحـــل : $\vec{D} = \vec{A} + \vec{C} = 5\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$

ولمعرفة الزاوية ما بين $\vec{D}$ و $\vec{B}$ نطبق المعادلة (1.27) :

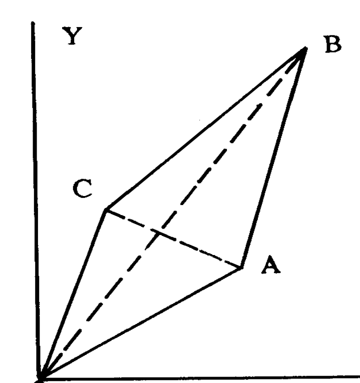
$$\cos\alpha = \frac{(5\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k})}{\sqrt{(5)^2 + (-3)^2 + (3)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{17}{3\sqrt{43}}$$

ويكون إسقاط $\vec{D}$ على $\vec{B}$ هو :

$$|\vec{D}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{43} \cdot \frac{17}{3\sqrt{43}} = \frac{17}{3}$$

2 – أوجد الزاوية الحادة المحصورة بين قطرى الشكل الرباعى الذى إحداثيات رؤوسه :

C(1,3,0) , B(4,6,0) , A(3,2,0) , O(0,0,0)



الحل :

$$\vec{OA} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

$$\vec{OB} = 4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$$

$$\vec{OC} = \vec{i} + 3\,\vec{j}$$

يلاحظ أن القطر CA يمكن إيجاده من العلاقة :

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$$

بتطبيق المعادلة (1.27) يمكن إيجاد الزاوية بين المتجهين $\vec{OB}$ و $\vec{CA}$:

$$\cos\Theta = \frac{\vec{OB}\cdot\vec{CA}}{|\vec{OB}|\,.\,|\vec{CA}|} = \frac{(4\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\,.\,(2\,\vec{i} - \vec{j})}{\sqrt{(4)^2 + (6)^2}\,.\,\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}\,.\,\sqrt{5}}$$

$\Theta = 82°\ 58'$

3 – أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه P Q R حيث :

P(2,3,5) , Q(4,2,-1) , R(3,6,4)

الحــــل :

$$\vec{PQ} = (4-2)\,\vec{i} + (2-3)\,\vec{j} + (-1-5)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - 6\,\vec{k}$$

$$\vec{PR} = (3-2)\,\vec{i} + (6-3)\,\vec{j} + (4-5)\,\vec{k} = \vec{i} - 3\,\vec{j} - \vec{k}$$

بتطبيق حاصل الضرب الاتجاهى والمعادلة (1.35) نجد :

$$\triangle = \frac{1}{2}(\vec{PQ}\ \wedge\ \vec{PR}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{426}$$

الباب الثانى

عناصر الإستاتيكا

فى هذا الفصل نعرف العناصر الأساسية والضرورية لكل طالب ومهندس يتعامل مع مادة الإستاتيكا .

2.1 – تعريف القوة :

القوة : هى مؤثر خارجى قادر على حفظ جسم ما فى حالة ثبات أو إحداث تشويهات به ، ويعرف هذا بالتعريف الإستاتيكى للقوة .

والقوة: هى متجه ، ولتحديده بدقة يجب توافر أربعة عناصر – انظر تعريف المتجه بالفصل الأول . شكل 2,1 .

(أ) نقطة التأثير وهى A .

(ب) خط عمل القوة AB

(جـ) الاتجاه المحدد للمسار ، وهو من A إلى B وليس العكس .

(د) مقدار أو قيمة القوة وهى $|\vec{F}|$.

B $\vec{F}$ A

شكل 2.1

سوف نرمز فى هذا الكتاب لمتجه القوة بالرمز $\vec{F}$ ،

والوحدات المستعملة لقياس القوة هى النيوتن ومشتقاته .

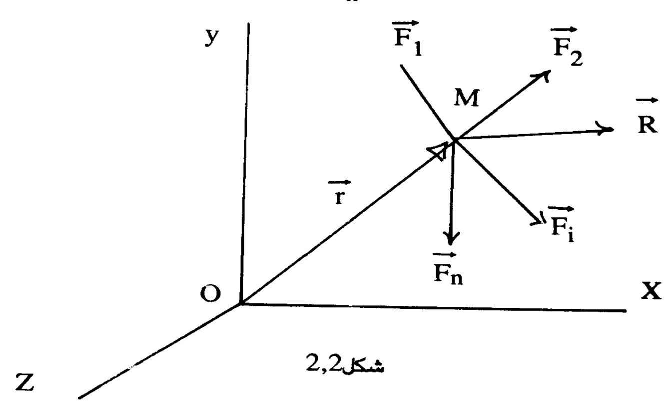
2,2 القوى المتلاقية (المتقاطعة) :

يقال إن مجموعة القوى متلاقية إذا كانت خطوط عملها تتقابل فى نقطة واحدة شكل 2,2 فإذا فرضنا أن لدينا جسيماً مادياً أبعاده صغيرة جداً بالنسبة للأجسام الأخرى المجاورة له فيمكن أن نعتبره فى هذه الحالة نقطة مادية ، ويعرف بأحداثياته

بالنسبة لمجموعة من المحاور . ونعتبر القوى المؤثرة على تلك النقطة المادية قوى متلاقية .

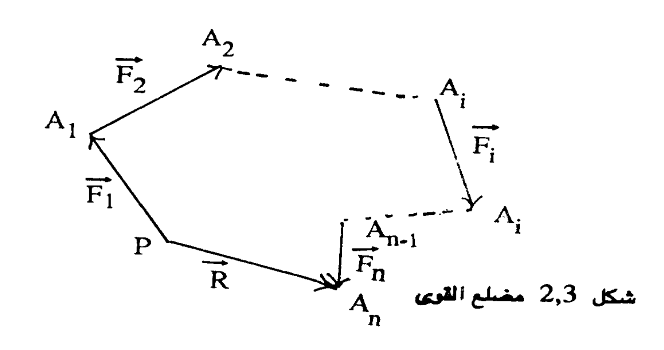
لندرس النقطة المادية **M** بالشكل **2,2** ، والتى تؤثر عليها مجموعة القوى :

$\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \ldots\ldots , \vec{F}_i , \ldots\ldots , \vec{F}_n$



شكل2,2

بتطبيق قاعدة جمع المتجهات السابق دراستها فى الفصل الأول يمكننا أن نجد ما يعرف بالمحصلة $\vec{R}$ لتلك المجموعة من القوى شكل 2,3



شكل 2,3 مضلع القوى

الشكل الحاصل عليه من عملية الجمع الاتجاهى يسمى فى هذه الحالة مضلع القوى ، والمحصلة تكون المتجه الواصل ما بين نقطة بداية المضلع P بنقطة النهاية A_n .

وتعرف المحصلة بأنها القوة المكافئة لمجموعة القوى السابق تعريفها ، أو بتعبير آخر هى القوة التى يمكن أن تختزل إليها مجموعة القوى : $\vec{F_n} \longrightarrow \vec{F_1}$

وتكون نقطة تأثيرها هى النقطة المادية M .

ويمكن كتابة المعادلة الاتجاهية التالية :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_i} + \ldots + \vec{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \qquad (2.1)$$

2,21 دراسة تحليلية :

لندرس الآن مجموعة القوى السابقة بطريقة تحليلية ، وذلك بعد أن درسناها بيانياً .

دعنا نعرف تلك القوى بمساقطها على المحاور الثلاثة OX , OY , OZ كما يلى :

$\vec{F_1}(x_1, y_1, z_1), \vec{F_2}(x_2, y_2, z_2), \ldots, F_i(x_i, y_i, z_i),$

$\vec{F_n}(X_n, Y_n, Z_n).$

ومن دراسة المتجهات بالفصل الأول لدينا :

$$\vec{F_i} = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k} \ldots\ldots \qquad (2.2)$$

بالتعويض عن $\vec{F_i}$ من المعادلة (2.2) فى المعادلة (2,1) نجد :

$$\vec{R} = (\Sigma X_i)\vec{i} + (\Sigma Y_i)\, j + (\Sigma Z_i)\vec{k} + \ldots \qquad (2.3)$$

يمكن من المعادلة (2.3) أن نستنتج مركبات المحصلة على المحاور الثلاثة :

$$X = \Sigma x_i \quad , \quad Y = \Sigma y_i \quad , \quad Z = \Sigma z_i \ldots\ldots \qquad (2.4)$$

أما قيمة المحصلة فنحصل عليها عن طريق المعادلة :

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (2.5)$$

وجيوب تمام اتجاهاتها :

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{R}|}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{R}|}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{R}|} \qquad (2.6)$$

وكما أسلفنا فإن نقطة تأثيرها فى M ، وبذلك تكون عناصرها الأربعة معرفة .

2,22 قوى متلاقية بالمستوى :

تعتبر القوى المتلاقية بالمستوى حالة خاصة ومبسطة من الحالة السابقة ، فإذا افترضنا أن المستوى المعنى هو XOY ، فإن كل المركبات فى اتجاه Z تصبح غير موجودة والمعادلات أعلاه تبسط كما يلى :

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} \qquad (2.7)$$

حيث :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad (2.8)$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} \qquad (2.9)$$

حيث α هى الزاوية التى تصنعها المحصلة مع المحور الأفقى OX .

2,3 عزم قوى بالنسبة لنقطة :

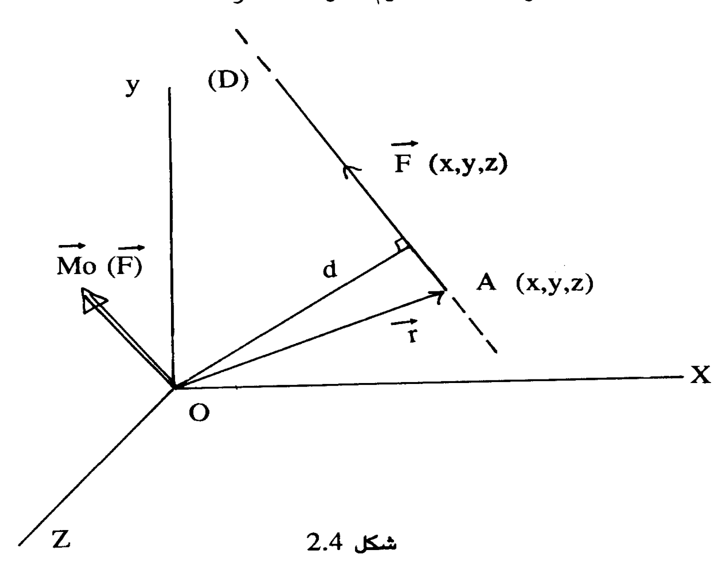
بالإشارة إلى الشكل 2,4 حيث :

$\vec{F}$ = متجه القوة (وهو متجه منزلق) .

(D) = خط عمل المتجه المنزلق $\vec{F}$.

A = نقطة تأثير القوة $\vec{F}$.

O = النقطة المراد حساب عزم القوة $\vec{F}$ حولها .



شكل 2.4

تعريف : يعرف عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة O بأنه
حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\vec{r}$ و $\vec{F}$:

$$\vec{M}_0 (\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \text{...} \quad (2.10)$$

ويكون مساوياً لمساحة متوازى الاضلاع المبنى على المتجهين $\vec{r}$ و $\vec{F}$ ،
ويعرف المتجه $\vec{r}$ بأنه متجه الموضع :

$$\vec{r} = \vec{OA}$$

خواص العزم :

– متجه العزم $\overrightarrow{M_O}$ هو متجه متصل بالنقطة O .

– يكون عموديا على المستوى المكون $\overrightarrow{r}$ و $\overrightarrow{F}$.

– قيمة هذا العزم يمكن أن تحسب من المعادلة التالية :

$$|\overrightarrow{M_0}| = |\overrightarrow{r}| . |\overrightarrow{F}| . \sin(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}) = F . d \qquad (2.11)$$

حيث d هي المسافة العمودية من النقطة O إلى المحور (D) .

– اتجاه العزم يكون موجباً بحيث يمكن تطبيق قاعدة اليد اليسرى على المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{r}$ و $\overrightarrow{F}$ و $\overrightarrow{M_o}$ على الترتيب .

– يتضح من الشكل أن العزم يكون صفراً إذا كان (D) يمر بالنقطة O حيث يصبح المتجه $\overrightarrow{r}$ مساويا صفراً .

2.31 المعادلة التحليلية للعزم :

بفرض أن :

$$\because \quad \overrightarrow{F} = X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} + Z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (yZ - zY)\,\overrightarrow{i} + (zX - xZ)\,\overrightarrow{j} + (xY - yX)\,\overrightarrow{k} \qquad .... (2.12)$$

ومنها نجد أن مركبات $\overrightarrow{M_0}$ على المحاور الثلاثة OZ, OY, OX على الوجه

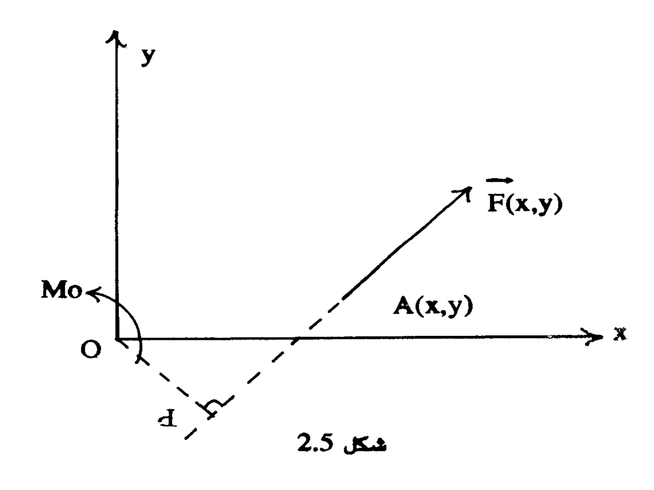
التالى :

$$\left.\begin{aligned} M_x &= yZ - zY \\ M_y &= zX - Zx \\ M_z &= xY - yX \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.13)$$

فى الحالة الخاصة والتى تكون فيها القوى بالمستوى XOY نجد أن (شكل (2.5) :

$$\vec{M_0} = M_z \vec{K} = (xY - yX)\vec{K} \quad \ldots\ldots \quad (2.14)$$

$$|\vec{M_0}| = |\vec{M_z}| = xY - yX = \pm Fd \quad \ldots\ldots \quad (2.15)$$

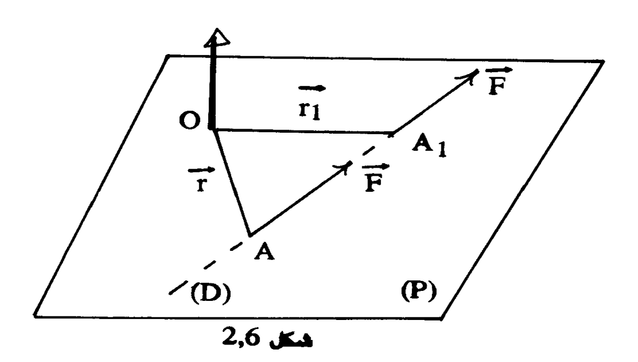


شكل 2.5

ويكون هذا العزم موجباً إذا كان من X إلى Y وسالباً فى الاتجاه من Y إلى X .

نظرية : عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لنقطة ما لا يتوقف على نقطة تأثير المتجه $\vec{F}$

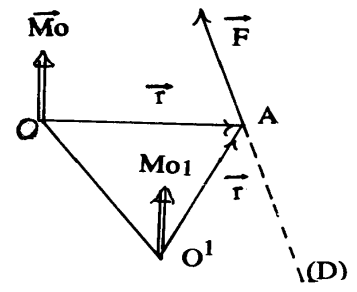
الإثبات (شكل 2,6) .



شكل 2,6

$$\vec{M_0} = \vec{r} \wedge \vec{F} = (\vec{r} + \vec{AA'}) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{F}$$
$$= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{o} = \vec{M_o} \quad \text{........................} \quad (2.15)$$

العلاقة بين العزمين حول نقطتين مختلفتين $\vec{M_o}$ و $\vec{M_{O'}}$ للقوة $\vec{F}$ ، انظر شكل 2,7 .



لتكن النقطتان هما O و O . والمطلوب إيجاد العلاقة ما بين عزم القوة $\vec{F}$ حول O ، وبين عزم نفس القوة حول O` .

$$\vec{M_{o'}} = \vec{r'} \wedge \vec{F} = (\vec{o'o} + \vec{r}) \wedge \vec{F}$$
$$= \vec{o'o} \wedge \vec{F} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M_o} + \vec{o'o} \wedge \vec{F} \quad \text{........} \quad (2.16)$$

إذا عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة O' يكون مساوياً لحاصل جمع العزم حول حول النقطة O ، والعزم حول O' لقوة تساوى $\vec{F}$ ولكن نقطة تأثيرها هى O .

2.32 المحصلة والعزم الناتجين عن مجموعة من القوى :

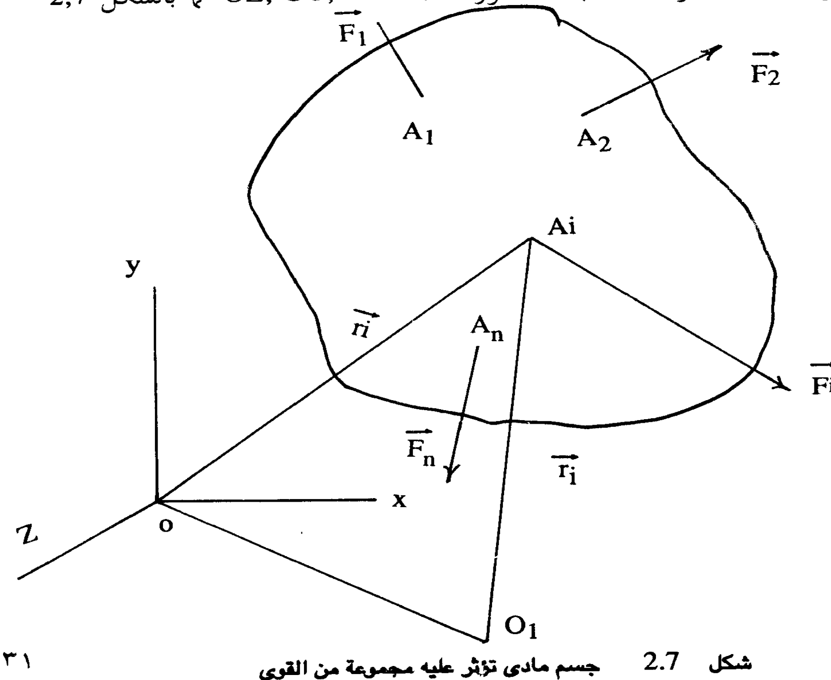
لندرس مجموعة القوى التى تؤثر على الجسم المادى ولتكن :

$$\vec{F_1} \ , \ \vec{F_2} \ , \ldots\ , \ \vec{F_i} \ , \ldots\ , \ \vec{F_n}$$

ونقاط تأثير هذه المجموعة هى على التوالى : $A_1 , A_2 , \ldots , A_i , \ldots , A_n$

ومتجهات الموضع لها تكون : $\vec{r_1} \ , \ \vec{r_2} \ , \ldots\ , \ \vec{r_i} \ , \ldots\ , \ \vec{r_n}$

وذلك كله معرف بالنسبة للمحاور الثلاثة OZ, OY, OX كما بالشكل 2,7



شكل 2.7 جسم مادى تؤثر عليه مجموعة من القوى

ويمكن لهذه المجموعة من القوى بالشكل 2,7 أن تعرف بمتجهين اثنين فقط : محصلتها العامة وعزم هذه القوى بالنسبة لنقطة ما ولتكن O .

فالمحصلة العامة لها هى عبارة عن متجه حر يساوى – كما أسلفنا – المجموع الاتجاهى لمجموعة القوى أى :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_n} + ... + \vec{F_i} + ... + \vec{F_n}$$

أما العزم المحصل بالنسبة لنقطة O فهو متجه متصل ، نقطة الأصل له O ، ويساوى مجموع عزوم القوى حول النقطة O أى :

$$\vec{M_0} = \vec{r_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{r_2} \wedge \vec{F_2} + ... + \vec{r_i} \wedge F_i + ... + \vec{r_n} \wedge \vec{F_n} \quad (1)$$

2.33 المعادلة التحليلية للمحصلة والعزم الناتجين عن مجموعة القوى :

يمكن تعريف متجهى القوة $\vec{F_i}$ والموضع $\vec{r_i}$ بالنسبة للمحاور OZ, OY, OX على الصورة :

$$\vec{F_i} = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k} \quad (2)$$
$$\vec{r_i} = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

وينتج من هذا أن المحصلة تصبح :

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F_i} = (\Sigma x_i) \vec{i} + (\Sigma Y_i) \vec{j} + (\Sigma Z_i) \vec{k}$$

وتكون مركباتها :

$$X = \Sigma X_i , Y = \Sigma Y_i , Z = \Sigma Z_i$$

وبالنسبة للعزم فنجد :

$$\vec{M}_0 = \Sigma \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix}$$

$$= [\Sigma (y_i Z_i - Y_i z_i)] \vec{i} + [\Sigma (z_i X_i - x_i Z_i)] \vec{j}$$

$$+ [\Sigma (x_i Y_i - y_i X_i)] \vec{k}$$

ويتضح من ذلك أن مركبات العزم هى :

$$M_x = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$M_y = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i)$$

$$M_z = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i)$$

نحاول الآن إيجاد العلاقة ما بين المتجهين $\vec{R}$ و $\vec{M}_O$:

حاصل ضرب العزم $\vec{M}_O$ بالمحصلة $\vec{R}$ لمجموعة القوى يكون ثابتاً ، وذلك لجميع النقط .

الإثبات :

بتطبيق العلاقة (2.16) نجد :

$$\vec{M}_o = \vec{M}_0 + \vec{\acute{o}o} \wedge \vec{R}$$

حيث O و Ó موضحتان بالشكل 2,7 وهما أى نقطتان بالفراغ .

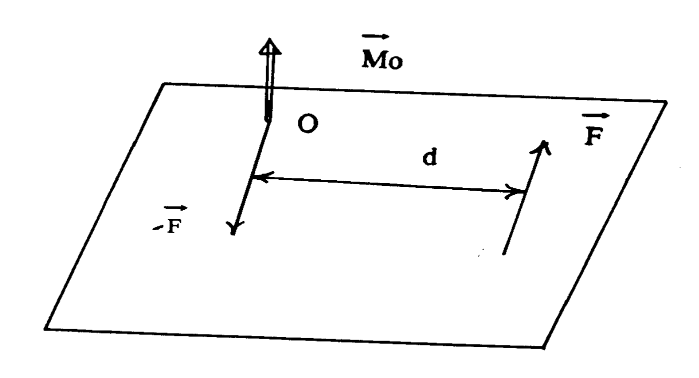
نضرب المعادلة السابقة فى $\vec{R}$ قياسياً لنحصل على :

$$\vec{M}_{o} \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} + (\vec{oo} \wedge \vec{R}) \cdot R = M_0 \cdot \vec{R} + 0$$

$$\vec{M}_{o} \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} = \text{ثابت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.18)$$

2.4 الازدواج :

يعرف الازدواج بأنه قوتان متوازيتان لهما نفس القيمة ، ولكن اتجاهها متضادان ، وبناء على هذا التعريف (شكل 2,8) نحصل على العلاقات التالية :



شكل 2,8

$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$$

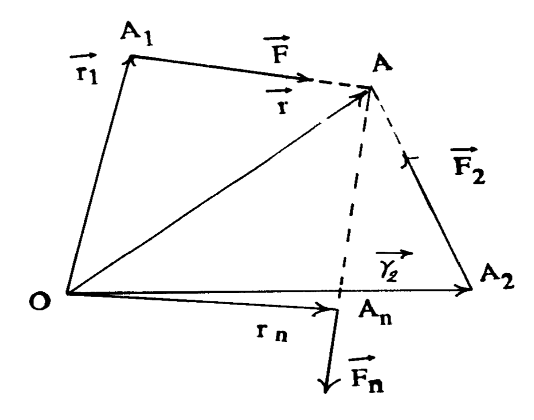
$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0 (-F) + \vec{M}_0 (\vec{F}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.18)$$

$$= 0 + \vec{M}_0 (\vec{F})$$

2.5 نظرية فارينيون :

العزم الناتج عن مجموعة من القوى المتلاقية بالنسبة لنقطة O يساوى عزم محصلة هذه القوى حول نفس النقطة :

الإثبات : شكل 2.9



شكل 2,9

لتكن مجموعة القوى المتلاقية فى النقطة A :

$$\vec{F}_1 \ , \ \vec{F}_2 \ , \ \ldots , \ \vec{F}_n$$

وبناء على المعادلتين (2.1) , (2.17) نجد :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad , \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\therefore \vec{M}_0 = (\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2) + \ldots + (\vec{r}_n \wedge \vec{F}_n)$$

$$= (\vec{r} + \vec{AA}_1) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{r} + \vec{AA}_2) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{r} + \vec{AA}_n) \wedge \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_o = (\vec{r} \wedge \vec{F}_1) + (\vec{r} \wedge \vec{F}_2) + \ldots\ldots + (\vec{r} \wedge \vec{F}_n) + \vec{O}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots. + F_n) = \vec{r} \wedge \vec{R} \quad \ldots\ldots (2.20)$$

2.6 اختزال مجموعة من القوى حول نقطة :

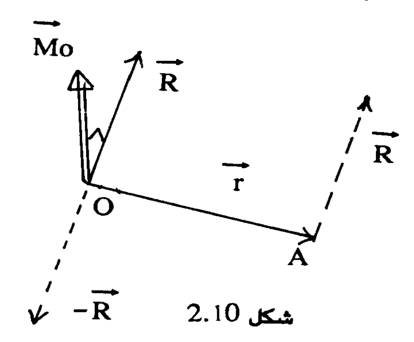
نقصد بعملية اختزال القوى هو تحويلها إلى أبسط صورة لها ، وذلك بالنسبة لنقطة ، ولتكن النقطة O ؛ بالشكل 2.10 .

يلاحظ أن مجموعة القوى أعلاه يمكن أن تمثل عند النقطة A بمحصلتها فقط ، وهى بالطبع أبسط صورة لهذه القوى ، ولكن عند النقطة A . فإذا أريد نقل هذه المحصلة من النقطة A إلى النقطة O فلابد أن تنقل بقيمتها $\vec{R}$ بالإضافة إلى عزم M_o

حيث :

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

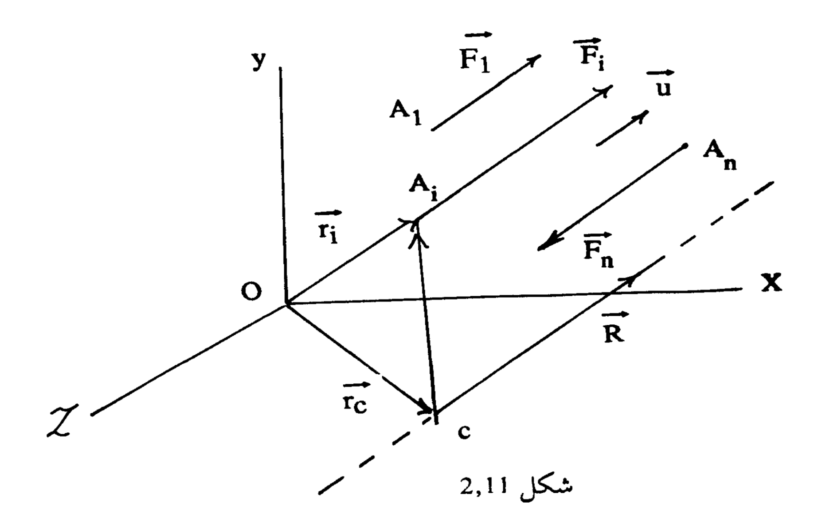
و $\vec{r}$ هو المتجه الواصل من النقطة O إلى A انظر شكل 2.10 .



شكل 2.10

$\vec{M}_o \cdot \vec{R} = O$ فلابد أن يكون المتجهان متعامدين .

2.7 القوى المتوازيـــة :



شكل 2,11

لتكن مجموعة القوى المتوازية :

$\vec{F_1}\ ,\ \vec{F_2}\ , \ldots , \vec{F_i}\ , \ldots ,\ \vec{F_n}$

حيث نقاط تأثيرها هى على التوالى :

$\vec{A_1}\ ,\ \vec{A_2}\ , \ldots , \vec{A_i}\ , \ldots ,\ \vec{A_n}$

ويمكننا أن نكتب :

$$\vec{F_i} = |\vec{F_i}| . \vec{U}$$

وحيث إن :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

$$\therefore = \vec{R} = \Sigma |\vec{F_i}| . \vec{U} = \vec{U} (\Sigma |\vec{F_i}|) = \vec{U} (\Sigma \vec{F_i})$$

$$\therefore \vec{R} = R\ \vec{U} \qquad 2,21$$

أى أن المحصلة لهذه القوى المتوازية تكون مساوية لمجموع القوى جبرياً ، وهى موازية لاتجاهات هذه القوى حيث إن متجه الوحدة $\vec{U}$ موازى لهذه القوى انظر شكل 2,11 ، ويمكن حساب عزوم تلك القوى حول النقطة O بالشكل 2,11 كما يلى :

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \vec{U}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \wedge \vec{U}_i$$

$$\vec{M}_0 = \Sigma F_i \vec{r}_i) \wedge \vec{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.22)$$

والعزم الناتج عن هذه القوى وهو $\vec{M}_o$ يكون عمودياً على مجموع القوى :

$$\vec{M}_0 \perp \vec{U} \rightarrow \vec{M}_0 \perp \vec{R} \rightarrow \vec{M}_0 . \vec{R} = 0$$

وحيث إن حاصل الضرب : $O = \vec{M}_o . \vec{R}$ فإنه يمكننا تطبيق النظرية النظرية السابقة (فارينيون) .

هذا فضلاً عن كون مجموع القوى السابقة يمكن استبدالها بقوة واحدة وهى المحصلة $\vec{R}$ الموازية للقوى . تطبق النظرية بالنسبة للنقطة C وهى نقطة تأثير المحصلة $\vec{R}$

$$\vec{M}_c (\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{CA}_i \wedge \vec{F}_i = 0$$

$$\Sigma (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \wedge \vec{F}_i = \Sigma \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i - \Sigma \vec{r}_c \wedge \vec{F}_i$$

$$= \Sigma \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i - \vec{r}_c \wedge \Sigma \vec{F}_i$$

$$= \Sigma \vec{r}_i \wedge F_i \vec{U} - \vec{r}_c \wedge \Sigma F_i \vec{U}$$

$$= (\Sigma\ F_i\ \vec{r_i})\ \Lambda\ \vec{U} - \vec{r_c}\ (\Sigma F_i)\ \Lambda\ \vec{U}$$

$$= [(\Sigma\ \vec{F_i}\ \Lambda\ \vec{r_i}) - \vec{r_c}\ (\Sigma\ \vec{F_i})]\ \Lambda\ \vec{U} = \vec{O}$$

والحل الجزئى لهذه المعادلة هو :

$$\Sigma F_i\ \vec{r_i} - \vec{r_c}\ .\ (\Sigma F_i) = \vec{O}$$

ومنها يمكن أن نحصل على المتجه $\vec{r_c}$:

$$\vec{r_c} = \frac{\Sigma F_i\ \vec{r_i}}{\Sigma F_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.23)$$

النقطة C تعرف بمركز القوى المتوازية ، وهى كما أسلفنا نقطة تأثير المحصلة $\vec{R}$
وتكون إحداثيات $\vec{r_c}$ بالنسبة للمحاور الثلاثة كما يلى :

$$X_c = \frac{\Sigma F_i X_i}{\Sigma F_i}$$

$$Y_c = \frac{\Sigma F_i Y_i}{\Sigma F_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.24)$$

$$Z_c = \frac{\Sigma F_i Z_i}{\Sigma F_i}$$

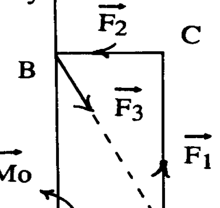
والعلاقات (2.24) تعتبر هامة جداً فى التطبيقات الهندسية كما سيلاحظ القارىء فى الفصول الأخيرة من هذا الكتاب .

2.8 أمثلة محلولة :

١ – لتكن القوى فى المستوى XOY ذات القيم التالية :

$$|\vec{F_1}| = 3F, |\vec{F_2}| = 2F, |\vec{F_3}| = \sqrt{5}\ F$$

باعتبار أن اتجاهات هذه القوى الثلاث معروفة كما بالشكل التالى :



المطلوب حساب :

(أ) المحصلة العامة لهذه القوى .

(ب) العزم الناتج عنها حول النقطة O .

علماً بأن : OA = a, OB = 2a

الحـــل :

بتطبيق المعادلة (2.7) :

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

حيث :

$$X = \Sigma X_i = O - 2F + F = -F$$

$$Y = \Sigma Y_i = 3F + O - 2F = F$$

ومن المعادلة (2.8) نجد :

$$|R| = \sqrt{(-F)^2 + (F)^2} = \sqrt{2}\ F$$

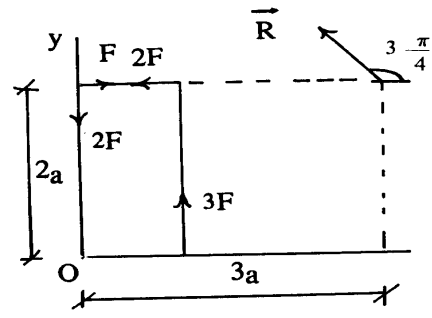
واتجاه $\vec{R}$ مع المحور الأفقى يمكن الحصول عليه من (2.9) :

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{F}{-F} = -1 \longrightarrow \alpha = \frac{3}{4}\pi = 135°$$

وحيث إن $\vec{R}$ فى المستوى XOY فيمكن إيجاد نقطة تأثيرها بتطبيق المعادلتين الأولى والثانية من (2.24) لنجد : (انظر الشكل أسفله) .

$$X_c = \frac{\Sigma F_i X_i}{\Sigma F_i} = \frac{(2F)_0 - 3F(a)}{2F - 3F} = 3a$$

$$Y_c = \frac{\Sigma F_i Y_i}{\Sigma F_i} = \frac{2F(2a) - F(2a)}{2F - F} = 2a$$



1احداثيات المحصلة R

(ب) لإيجاد عزم هذه القوى حول O يمكن أن نطبق (2.14) .

$$\vec{M_o} = M_z \vec{K} = (xy - yX) \vec{K}$$

وذلك علماً بأن :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 3a\vec{i} + 2a\vec{j}$$

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} = -F\vec{i} + F\vec{j}$$

$$\vec{M}_0 = (3a F - 2a (-F)) \vec{K} = 5Fa \vec{K}$$

$$|M_0| = 5Fa$$

٢ – علماً بأن $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ قوتان تؤثران فى النقطة O . حيث :

$$\vec{F}_1 = 2 \vec{i} + 4 \vec{j} - 4 \vec{K} , \quad \vec{F} = i - \vec{j} + 5 \vec{K}$$

المطلوب إيجاد ما يلى :

(أ) قيمة كل من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

(ب) قيمة المحصلة ومركباتها واتجاهها .

(جـ) عزم هذه المحصلة بالنسبة للنقطة : A(2, - 1,3)

(د) الزاوية التى يصنعها $\vec{R}$ مع المتجه $\vec{OA}$.

الحـــــل :

(أ) يمكن الحصول على قيم كل من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بتطبيق المعادلة (2.5) :

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = 6$$

$$|\vec{F}_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = 5.2$$

(ب) للـــــحصول على $\vec{R}$ نستعمـــــل المعادلـــــتين (2.4) , (2.5) :

$$X = 2 + 1 = 3 \quad , \quad Y = 4 - 1 = 3 \quad , \quad Z = (-4) + 5 + 1$$

$$\therefore \vec{R} = 3 \vec{i} + 3 \vec{j} + \vec{K}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (1)^2} = 4.36$$

المعادلات (2.6) تعطى اتجاهات المحصلة :

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{R}|} = \frac{3}{4.36} = 0.688 \rightarrow \alpha = 46{,}52^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{|\vec{R}|} = \frac{3}{4.36} = 0.688 \rightarrow \beta = 46{,}52^\circ$$

الزاوية β تساوى α فى القيمة ولكنها كما هو معلوم الزاوية التى تصنعها المحصلة مع المحور OY فى حين أن α تكون مع OX وبالتالى فهما زاويتان مختلفتان .

$$\cos\gamma = \frac{Y}{|\vec{R}|} = \frac{1}{4.36} = 0.229 \rightarrow \gamma = 76{,}74^\circ$$

(جـ) العزم $\vec{M}_A$ يمكن الحصول عليه بتطبيق (2.12) :

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 9)\ \vec{i} + (-9 + 2)\ \vec{j} + (-6 - 3)\ \vec{k}$$

$$M_A = 10\ \vec{i} - 7\ \vec{j} - 9\ \vec{k}$$

وقيمة $\vec{M}_A$ من المعادلة (2.5) تكون :

$$|\vec{M}_A| = \sqrt{(-10)^2 + (7)^2 + (9)^2} = 15{,}16$$

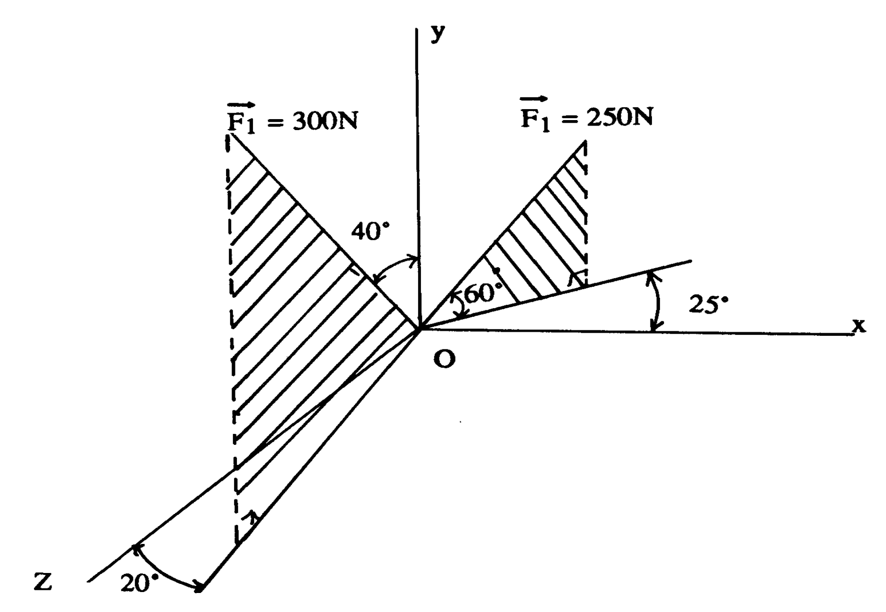
(د) لإيجاد الزاوية ما بين $\vec{R}$ و $\vec{OA}$ نعلم أن :

$$|\vec{M}_A| = |\vec{OA}|.|\vec{R}|\sin\Theta$$

$$\therefore 15{,}16 = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2}\ (4{,}36)\ \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{15{,}16}{(3{,}74)(4{,}36)} = 0{,}9297 \rightarrow \theta = 68{,}39$$

٣ – أوجد محصلة القوتين $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_1}$ بالشكل التالى المطلوب كذلك إيجاد الزاويا التى تصنعها تلك المحصلة مع المحاور الثلاثة .



الحـــــل :

لإيجاد المحصلة لهاتين القوتين نحاول أن نكتبهما بدلالة مركباتهما ، أى :

$$\overrightarrow{F_i} = X_i \ \overrightarrow{i} + Y \overrightarrow{j} + Z_i \ \overrightarrow{k}$$

ويمكن الوصول لتلك الصورة بتطبيق قواعد تحليل المتجهات بالفصل الأول من هذا الكتاب فنجد أن :

$$X_1 = |\vec{F_1}| . \cos 60° . \cos 25° = 250 (0.5)(0.906) = 113,29 \text{ N}$$

$$Y_1 = |\vec{F_1}| . \cos 30° = 250 (0.866) = 216.51 \text{ N}$$

$$Z_1 = |\vec{F_1}| . \text{Cos } 60° . \text{Cos } (90+25) = 250 (0,5)(-0,423) = -52,83 \text{ N}$$

$$\therefore \vec{F_1} = 113,29 \vec{i} + 216,51 \vec{j} + (-52,83) \vec{k}$$

$$X_2 = |\vec{F_2}| . \text{Cos } 50° . \text{Cos } 70° = 300 (0,643)(0.432) = 65,95 \text{ N}$$

$$Y_2 = |\vec{F_2}| . \text{Cos } 40° = 300 (0,766) = 229,81 \text{ N}$$

$$Z_2 = |\vec{F_2}| . \text{Cos } 50° . \text{Cos } 20° = 300 (0,643)(0.94) = 181,20 \text{ N}$$

$$\therefore \vec{F_2} = 65,95 \vec{i} + 229,81 \vec{j} + 181,21 \vec{k}$$

وبتطبيق المعادلة (2.3) يمكن إيجاد المحصلة :

$$\vec{R} = 179,24 \vec{i} + 446,32 \vec{j} + 128,28 \vec{k}$$

وقيمتها من (2.5) :

$$|\vec{R}_1| = \sqrt{(179,24)^2 + (446,32)^2 + (128,38)^2} = 497,805 \text{ N}$$

أما اتجاهات $\vec{R}$ فهى مباشرة من (2.6) :

$$\text{Cos } \alpha = \frac{179,24}{497,805} = 0,36 \longrightarrow \alpha = 68,9°$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{446,32}{497,805} = 0,897 \longrightarrow \beta = 26,29°$$

$$\text{Cos } \gamma = \frac{128,38}{497,805} = 0,258 \longrightarrow \gamma = 75,D5°$$

الباب الثالث

الاتــــزان

3.1 اتزان نقطة مادية حــرة :

تعريف : النقطة المادية أو الجزىء من المادة هى جسم صغير جداً يمكن إهمال أبعاده ويحدد موقعه بواسطة إحداثياته الثلاثة .

فإذا فرضنا أن هناك نقطة مادية واقعة تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية

$$\vec{F}_1 \, , \; \vec{F}_2 \, , \ldots , \; \vec{F}_i \, , \ldots \; \vec{F}_n$$

فإن هذه القوة يمكن أن ينشأ عنها إزاحة للجسم أو دوران له .

والإزاحات تكون فى اتجاه خط عمل القوة المؤثرة ، أما الدورانات فإنها تنشأ عن عزم هذه القوى حول نقطة ما ، ويكون أيضاً الدوران حول نفس النقطة (المحور) .

3.2 توازن الإزاحات :

لكى يحدث توازن إزاحات النقطة المادية فيجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليها صفراً ، أى :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} = \vec{0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1)$$

والمعادلة (3.1) يمكن كتابتها بالنسبة للمحاور الثلاثة OX , OY , OZ كما يلى :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i = 0 \, , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \vec{Y}_i = 0 \, ,$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \vec{Z}_i = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

المعادلات (3.2) تعرف بمعادلات الاتزان بالنسبة للإزاحات .

وتختزل المعادلات (3.2) إلى معادلتين فقط فى حالة قوى فى المستوى . فمثلاً إذا كانت القوى فى المستوى XOY فإننا نجد :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \;, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \text{.......................} \quad (3.3)$$

3.3 تــوازن الدورانات :

كما سبق فإن الدورانات تنشأ عن عزوم القوى حول نقطة ، فإذا افترضنا أن هذه النقطة هى 0 وهى نقطة أصل المحاور الثلاثة OX , OY , OZ فلحدوث الاتزان يجب أن يكون مجموع العزوم لكل القوى حول 0 مساوياً للصفر ، وهذا يمكن كتابته فى المعادلة :

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = 0$$

$$\vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = 0 \quad \text{............} \quad (3.4)$$

وهذه المعادلة تصبح بالنسبة للمحاور الثلاثة كما يلى :

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{n} (Z_i x_i - z_i X_i) = 0 \\ M_x &= \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} (x_1 Y_i - X_i y_i) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{..................} \quad (3.5)$$

وفى حالة وجود القوى فى المستوى XOY مثلاً يكون شرط اتزان الدورانات هو :

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - X_i y_i) = 0 \quad (3.6)$$

شروط الاتزان الكاملة تكون تامة فى حالة تحقيق المعادلات (3.2) , (3.5) إذا كانت القوى فى الفراغ (ست معادلات) .

ويكتفى بتحقيق المعادلات (3.3) , (3.6) فى حالة القوى بالمستوى (ثلاثة شروط) .

3.4 اتزان نقطة مادية معرضة لاتصال ما (بدون احتكاك) :

تعريف : يقال إن نقطة مادية معرضة للاتصال إذا ما كانت مجبرة على البقاء على منحنى ما ، أو سطح مادى أملس ، والقوى المؤثرة على النقطة المادية فى هذه الحالة تكون :

3.41 قوى خارجية فعالة :

يقصد بالقوى الخارجية الفعالة مجموعة القوى (قوة أو عزم) التى تؤدى إلى إزاحة أو دوران الجسم ، أى هى القوى التى تقوم بالفعل ، ويمكن تصنيف تلك القوى الخارجية كما يلى :

قوة تأثير مباشرة (قوة مركزة) أو حمل ، ويمكن تقسيم الأحمال إلى :

١ – قوى الحجوم مثل أوزان الأجسام .

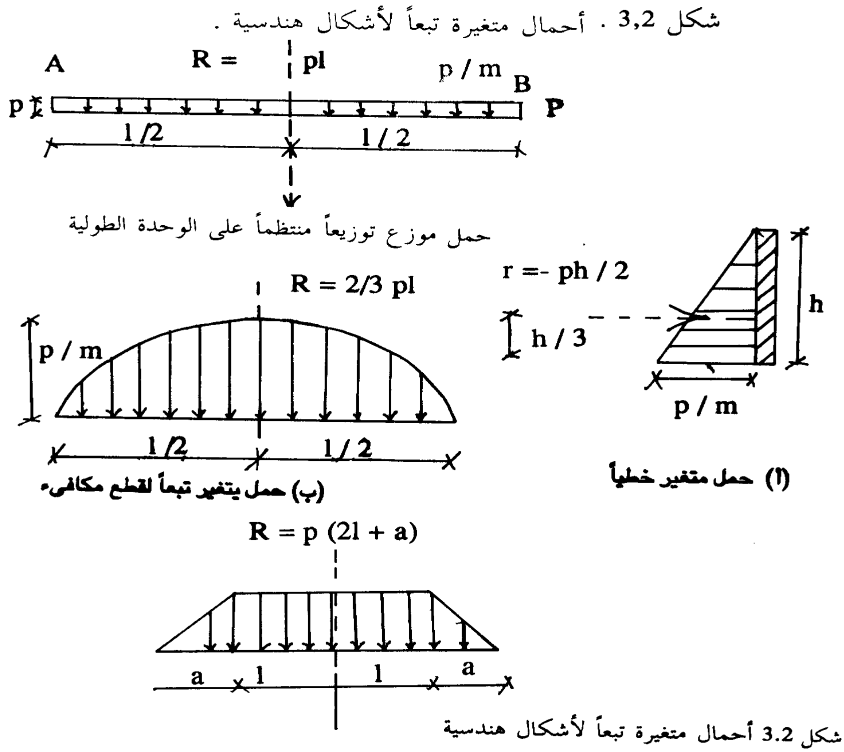
٢ – قوى سطحية كالقوى الخارجية التى تؤثر على سطوح الأجسام مثل ضغط الماء أو التربة أو الثلوج .... الخ .

والقوى السطحية يمكن بدورها أن تقسم إلى عدة أنواع :

(أ) قوى موزعة توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية للسطح ، حيث تكون محصلتها $\vec{R}$ فى المنتصف ، شكل 3,1 .

(ب) قوى توزيعها متغير خطياً أو تبعاً لقطع مكافيء أو شبه منحرف .... إلخ .

شكل 3,2 . أحمال متغيرة تبعاً لأشكال هندسية .



(ب) حمل يتغير تبعاً لقطع مكافيء

(ا) حمل متغير خطياً

شكل 3.2 أحمال متغيرة تبعاً لأشكال هندسية

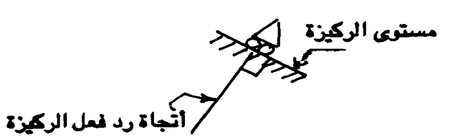
(ج) حمل يتغير تبعاً لشبه منحرف

3.42 ردود الأفعـــال :

ردود الأفعال هى عبارة عن قوى – قوة أو عزم – يقصد بها منع الإزاحات والدورانات ، أو منع حركة المنشآت بصفة عامة ، وردود الأفعال تنشأ عن وجود ركائز للمنشأ المراد حفظه فى حالة اتزانه ، وسوف ندرس – على سبيل المثال لا الحصر – الركائز الممكنة بالمستوى .

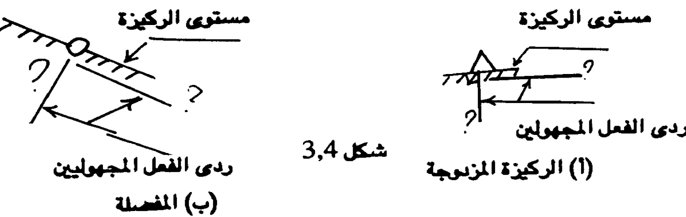
من المعروف أن فى المستوى لدينا ثلاثة أنواع ممكنة للحركة ، إزاحة أفقية ، وأخرى رأسية ، فضلاً عن الدوران أى ثلاث حريات للحركة ، وتبعاً لذلك الركائز يمكن أن تكون :

١ – **ركائز بسيطة** : شكل 3,3 : فى هذه الحالة تمنع الإزاحة فى الاتجاه العمودى على مستوى الركيزة فقط ، ومن ثم فلا يوجد إلا رد فعل واحد فى حين حرية الحركة متاحة فى اتجاهين : (الدوران + الاتجاه الموازى لمستوى الركيزة) .



شكل 3,3 – الركيزة البسيطة

٢ – **ركائز مزدوجة أو مفصلة** : يمكن لهذه الركيزة أن ترسم بطريقتين شكل 3,4 ا ، ب ، وبهذه الركيزة حرية حركة واحدة وهى الدوران .



شكل 3,4

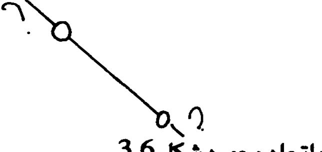
(أ) الركيزة المزدوجة

(ب) المفصلة

٣ – **التثبيت** : ويمكن أن يرسم كما هو موضح بالشكل 3,5 حيث تمنع فيه جميع أنواع الحركة بالمستوى ، ومن ثم فيوجد ثلاثة ردود أفعال وعدد حريات الحركة يساوى صفر .

شكل 3,5 – التثبيت وبه ثلاث ردود أفعال مجهولة.

٤ - **البندول** : وهذه الركيزة تعتبر مثل الركيزة البسيطة من حيث إنها تتحمل رد فعل واحد ، وتسمح بالدوران وبالإزاحة فى الاتجاه العمودى على محورها ، وهى ترسم كما بالشكل 3,6 .

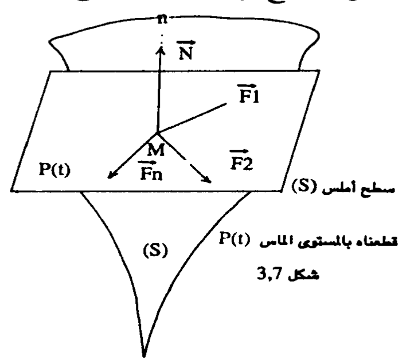


البندول وبه رد فعل واحد باتجاه محوره شكل 3,6

بعد معرفة القوى الخارجية وردود الأفعال (وتعرف ردود الأفعال بقوى الاتصال كذلك) ، يمكننا الآن دراسة اتصال النقطة المادية ، وكتابة معادلات الاتزان لها .

3.5 اتصال مثالى (دون احتكاك) :

فى هذه الحالة تتصل النقطة المادية بسطح أملس تماماً (S) وهو المبين بالشكل (3,7) . فلو افترضنا أن مجموع القوى المؤثرة عليها هى : $\vec{F_n}$ و ... و $\vec{F_2}$ و $\vec{F_1}$ ، ولو فرضنا أن رد فعل السطح عليها هو $\vec{N}$ حيث يكون اتجاه رد الفعل عمودياً على المستوى المماس للسطح (P_t) كما هو واضح بالشكل 3,7 .



شكل 3,7

ويكون شرط الاتزان فى هذه الحالة على الصورة :

$$\vec{N} + \Sigma \vec{F_i} = \vec{0} \qquad (3.7)$$

$$\vec{N} + \vec{R} = 0$$

النموذج الذى اخترناه بالشكل 3,7 ليس الوحيد ، ولكنه فقط مثال لعملية اتصال نقطة مادية بسطح ما ، فهذا السطح قد يستبدل بمنحنى أو قد يكون كرة ، وبالمثل يمكن استبدال النقطة المادية بأجسام صغيرة ، وتظل معادلات الاتزان دائماً كما سبق شرحه .

هذا ويجب أن نلاحظ أن معادلة الاتزان (3.7) تتغير فى حالة وجود قوى الاحتكاك ، وذلك كما سيأتى دراسته فى فصل الاحتكاك .

3.6 المنشآت المحددة والغير محددة استاتيكياً :

سوف تقتصر دراستنا على المنشآت بالمستوى فقط ، فلقد سبق بيان أن شروط الاتزان فى المستوى هى تحقيق المعادلات (3,3) , (3,6) ، وعلى وجه العموم فإن جميع أنواع المنشآت بالمستوى لابد وأن تخضع لأحدى الحالات الثلاث التالية :

(أ) عدد ردود الأفعال = عدد معادلات الاتزان ، وهذا النوع يسمى محدداً إستاتيكياً .

(ب) عدد ردود الأفعال > عدد معادلات الاتزان ، ويعرف بالمنشأ الغير محدد إستاتيكياً .

(جـ) عدد ردود الأفعال < عدد معادلات الاتزان ، ويكون منشأ غير ثابت وهو نوع من المنشآت لا يصح أن يوجد على الإطلاق .

المعادلة التالية يمكنها تحديد نوعية المنشأ من الناحية الإستاتيكية :

$$n = (i\,b + r) - (i\,j + k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.8)$$

حيث :

b = عدد القضبان التى يتكون منها المنشأ .

r = عدد ردود الأفعال .

j = عدد الوصلات أو العقد .

k = عدد الشروط الإضافية فإن لم توجد تصبح k صفراً .

i = عدد عادة يساوى 3 إلا فى حالة الكمرات المعرضة لأحمال رأسية فقط فيكون i = 2 .

وبناء على المعادلة (3.8) فيمكن أن نجد ما يلى :

n = صفر ويكون المنشأ محدداً إستاتيكياً .

n < صفر ومعناها منشأ غير ثابت .

n > صفر منشأ غير محدد إستاتيكياً .

المعادلة (3.8) تستعمل فقط للمنشآت بالمستوى وإلا فيجب تغيير i إلى 6 فى حالة الفراغ .

3.7 كيفية حساب ردود الأفعال للمنشآت المحددة إستاتيكياً :

تعتبر عملية حساب ردود الأفعال تطبيقاً هندسياً على مسائل الاتزان ، فردود الأفعال تحسب من معادلات الاتزان (3.3) , (3.6) ، وذلك فى حالة المنشآت بالمستوى . أما إذا كان المنشأ بالفراغ فإن ردود الأفعال توجد بتطبيق المعادلات (3.2) , (3.5) ، ويفترض أن المنشآت المراد حساب ردود أفعالها محددة إستاتيكياً ، وسوف يتضح ذلك من الأمثلة فى نهاية هذا الفصل .

3.8 حالات خاصة للاتزان :

نقصد بالحالات الخاصة تلك الحالات التى يمكنها أن تبسط معادلات الاتزان ، وهى فى نفس الوقت حالات شائعة ، ونحن ندرس حالتين :

١ – نقطة مادية متزنة تحت تأثير قوتين :

فى هذه الحالة لابد أن تكون القوتان لهما نفس خط العمل ونفس القيمة ، ولكن اتجاه كل منهما معاكس للأخرى وهذا لكى تكون محصلتهما صفراً .

٢ – نقطة مادية تحت تأثير ثلاث قوى :

لكى يحدث الاتزان فى هذه الحالة فيجب أن تكون القوى الثلاث متلاقية فى نقطة واحدة ، وذلك لأن محصلة قوتان منهما يجب أن تساوى قيمة القوة الثالثة ، ولكن فى اتجاه معاكس ومن هذا يمكننا أن نكتب النظرية التالية :

نظرية القوى الثلاث :

إذا وقع جسم تحت تأثير ثلاث قوى وكان فى حالة اتزان فإن القوى الثلاث لابد أن تلتقى فى نقطة واحدة .

3.9 أمثلة محلولة :

١ – جسم كتلته m معلق بخيطين طولهما a و b فى مسمارين A و B . البعد الأفقى بين A و B مقداره C . الجسم فى حالة اتزان ، والمطلوب حساب الشد فى كل خيط .

الحـــل :

لنفرض أن P هو وزن الجســـم $\therefore P = -m\vec{g}$

والإشارة السالبة ناشئة عن اتجاه المحاور المبين بالرسم . يمكن أن نكتب شرط الاتزان كما يلى :

$$\vec{R} = \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$$

والآن نحاول إيجاد كل قوة فى صورة متجه مستقل كما يلى :

$$\vec{T_1} = -T_1 \cos\alpha \ \vec{j} + T_1 \sin\alpha \ \vec{K}$$

$$\vec{T_2} = -T_2 \cos\beta \ \vec{j} + T_2 \sin\beta \ \vec{K}$$

$$\vec{P} = -mg \ \vec{K}$$

بتطبيق معادلات الاتزان فى المستوى (3.3) (فى هذه الحالة المستوى هو YOZ) . نحصل على :

$$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$T_1 \sin\alpha \sin\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta - mg = 0$$

من (1) و (2) يمكن أن نجد :

$$T_1 = \frac{mg \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad , \quad T_2 = \frac{mg \cos A}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ومن دراسة المثلث ABC نجد العلاقات التالية :

$$Z^2 + X^2 = b^2 \rightarrow Z^2 = b^2 - X^2 \qquad (3)$$

$$Z^2 + (C - X)^2 = a^2 \rightarrow Z^2 = a^2 - (c - x)^2 \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) و (4) نجد :

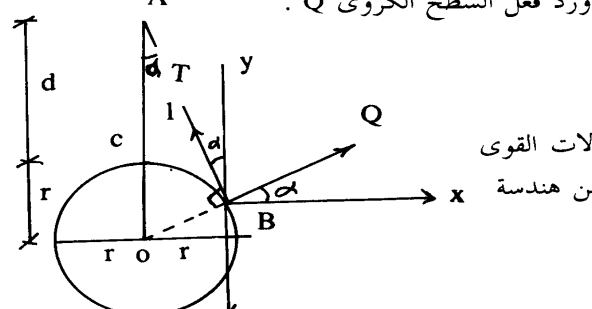
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2\,cx \quad \longrightarrow \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$$

ومنها نحصل على :

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \quad , \quad \cos \beta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\right) \quad , \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right)$$

2- بلية B وزنها P ونصف قطرها مهمل . معلقة فى نقطة A بواسطة خيط AB ، وترتكز على سطح كرة نصف قطرها r . المسافة ما بين A وسطح الكرة هى AC . فإذا علم أن : d = AC وأن طول الخيط l = AB وأن الخط OCA رأسى . أوجد الشد T فى الخيط ورد فعل السطح الكروى Q .



الحـــل :

يمكن أن نكتب معادلات القوى الاتجاهية كما هو واضح من هندسة الشكل :

$$\vec{Q} = (\cos \alpha)\,Q\,\vec{i} + (\sin \alpha)\,Q\,\vec{j}$$

$$\vec{T} = (-\sin \alpha)\,T\,\vec{i} + (\cos \alpha)\,T\,\vec{j}$$

$$\vec{P} = -\,mg\,\vec{j}$$

بما أن المجموعة متزنة فإننا نطبق المعادلات (3.1) و (3.3) لتصبح فى هذه الحالة :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = 0$$

$$X = \sum_{i=L}^{3} X_i = Q\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$$

$$Y = \sum_{i=L}^{3} Y_i = Q\sin\alpha + T\cos\alpha - mg = 0$$

من المعادلة (1) نجد أن :

$$Q = T\tan\alpha = T\frac{r}{l}$$

حيث من هندسة الشكل : $(\triangle\ OBA)$

$$\tan\alpha = \frac{r}{L}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{d+r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{L}{d+r}$$

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة (2) نجد :

$$T\frac{r}{\ell}\frac{r}{d+r} + T\frac{L}{d+r} = P$$

$$T\left(\frac{1}{d+r}\right)\left(\frac{r^2+l^2}{l}\right)P$$

$$\frac{T}{L}\left(\frac{1}{d+r}\right) = \left(\frac{P}{L^2+r^2}\right) \longrightarrow T = P\frac{\ell}{d+r}$$

ومن المعادلة (1) نجد أن :

$$Q = P\frac{r}{d+r}$$

حل آخر لنفس المسألة :

يظهر من الشكل أن المثلث OAB يمكن اعتباره مثلث للقوى حيث :

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{Q}$

ويمكن بالتالى كتابة النسب التالية :

$$\frac{\overrightarrow{T}}{\overrightarrow{BA}} = \frac{\overrightarrow{P}}{\overrightarrow{A0}} = \frac{\overrightarrow{Q}}{\overrightarrow{0B}} = 1$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلى :

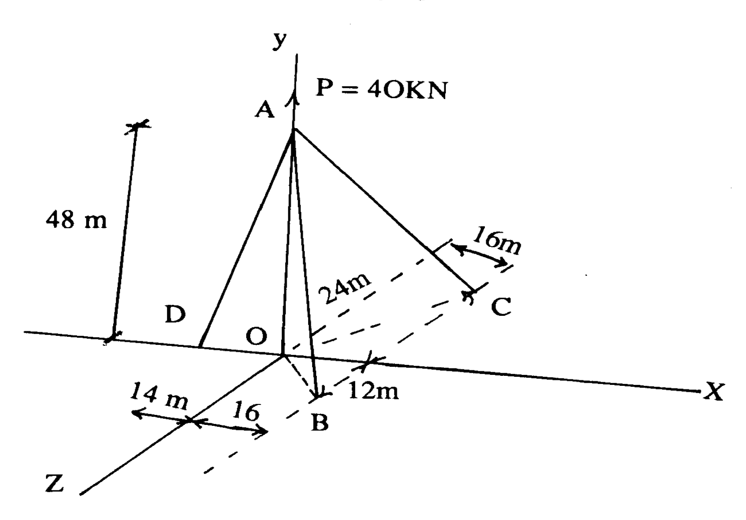
$$\frac{T}{\ell} = \frac{R}{d + r} = \frac{Q}{r}$$

ومنها نحصل على :

$$T = P \frac{1}{d + r}$$

$$Q = P \frac{\ell}{d + r}$$

3 – قوة مقدارها 140KN نقطة تأثيرها هى A (انظر الشكل) . ثلاثة كابلات AB , AD , AC تشد هذه القوة . فإذا علم أن المجموعة فى حالة اتزان . أوجد قيمة الشد فى كل كابل من الكابلات الثلاثة .



الحـــل :

من شرط الاتزان يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية التالية :

$$\vec{P} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD}$$

ويمكن كتابة معادلة اتجاهية لكل قوة كما يلي :

$$\vec{T}_{AB} = \cos\alpha_1 T_{AB} \vec{i} + \text{Cos}\,\beta_1 T_{AB} \vec{j} + \text{Cos}\,\gamma_1 T_{AB} \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = \cos\alpha_2 T_{AC} \vec{i} + \text{Cos}\,\beta_2 T_{AC} \vec{j} + \text{Cos}\,\gamma_2 T_{AC} \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = \cos\alpha_3 T_{AD} \vec{i} + \text{Cos}\,\beta_3 T_{AD} \vec{j} + \text{Cos}\,\gamma_3 T_{AD} \vec{k}$$

ولحساب الزوايا أعلاه فلابد من حساب أطوال الكابلات ، وهى من هندسة الشكل كما يلي :

$$AB = \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + (48)^2} = 52 \text{ m}$$

$$AC = \sqrt{(24)^2 + (16)^2 + (48)^2} = 56 \text{ m}$$

$$AD = \sqrt{(48)^2 + (14)^2} = 50 \text{ m}$$

وتصبح المعادلات الثلاث أعلاه كما يلي :

$$\vec{T}_{AB} = \frac{16}{52} T_{AB} \vec{i} + \frac{48}{52} T_{AB} \vec{j} + \frac{12}{52} T_{AB} \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{16}{56} T_{AC} \vec{i} + \frac{48}{56} T_{AC} \vec{j} - \frac{24}{56} T_{AC} \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{14}{50} T_{AD} \vec{i} + \frac{48}{50} T_{AD} \vec{j} + \frac{0}{50} T_{AD} \vec{k}$$

وبتطبيق المعادلات (3.2) نحصل على :

$$\frac{16}{52} T_{AB} + \frac{16}{56} T_{AC} - \frac{14}{50} T_{AD} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{48}{52} T_{AB} + \frac{48}{56} T_{AC} + \frac{48}{50} T_{AD} = 140 \quad (2)$$

$$\frac{12}{52} T_{AB} + \frac{24}{56} T_{AC} = 0 \quad (3)$$

بحل المعادلات الثلاث نحصل على :

$$T_{AB} = 47,182 \text{ KN} \quad , \quad T_{AC} = 25,408 \text{ KN} \quad , \quad T_{AD} = 77,775 \text{ KN}$$

4 – فى المثال السابق يراد تغيير موقع النقطة B بحيث تصبح على المحور OZ . فإذا علم أن الشد فى الكابل AC قيمته 70KN أوجد موضع B وكذلك قيمة الشد فى كل من الكابلين AD , AB بحيث تصبح المجموعة متزنة .

الحـــل :

بعد تغيير موضع B لتصبح على المحور OZ فإن المعادلات الثلاث بالمثال السابق تصبح :

$$\frac{16}{56} T_{AC} - \frac{14}{50} T_{AD} = 0 \quad (1)$$

$$\cos\beta \, T_{AB} + \frac{48}{56} T_{AC} + \frac{48}{50} T_{AD} = 140 \quad (2)$$

$$\sin\beta \, T_{AB} - \frac{24}{56} T_{AC} = 0 \quad (3)$$

حيث β هى الزاوية التى يصنعها الكابل AB مع المحور الرأسى OY من المعادلة الأولى نجد :

$$T_{AD} = \frac{16}{56} X \frac{50}{14} (70) = 71,429 \text{ KN}$$

بالتعويض عن T_{AC} و T_{AD} فى المعادلتين الثانية والثالثة نجد :

$$\cos\beta\, T_{AB} + \frac{48}{56} X 70 + \frac{48}{50} X 71,429 = 140 \quad (4)$$

$$\sin\beta\, T_{AB} - \frac{24}{56} X 70 = 0 \quad (5)$$

من هاتين المعادلتين نجد أن :

$$\tan\beta = 2,625$$

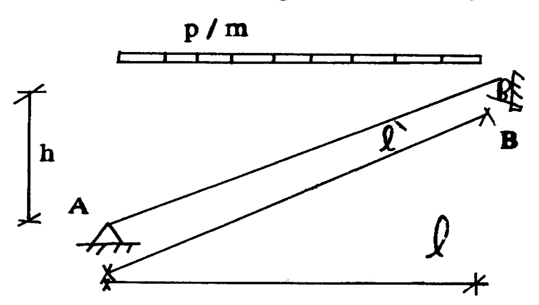
$$\beta = 65,15°$$

بمعرفة قيمة الزاوية β أصبح محدداً وإحداثياتها هى : (0,0,126)

أما قيمة الشـد فى الكابل AB فنحصل عليه من المعادلة (5)

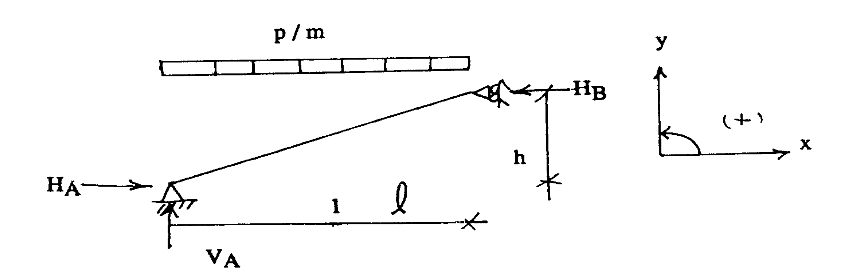
$$T_{AB} = \left(\frac{24}{56} X 70 \right) \frac{1}{\sin\beta} = 32,102 \text{ KN}$$

5 – أوجد ردود أفعال الكمرة AB المعرضة للحمل P الموزع توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية للمسقط الأفقى للكمرة .



الحـــل :

نفترض أن اتجاه ردود الأفعال كما هو موضح بالشكل أسفله :



بافتراض أن الاتجاه الموجب للمحاور والعزوم هو المبين بالشكل ، وبتطبيق معادلات الاتزان الثلاث بالمستوى نجد :

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = p\ell \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad H_B\, h - p\, e\, \frac{\ell}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad H_B = \frac{P\, L^2}{2\, h} \leftarrow$$

بدلاً من استعمال معادلة الاتزان الثالثة فإننا نستعمل معادلة العزوم حول الطرف الآخر (أى B) تساوى صفراً وذلك لإيجاد H_A ونحقق النتائج بمعادلة الاتزان الثالثة :

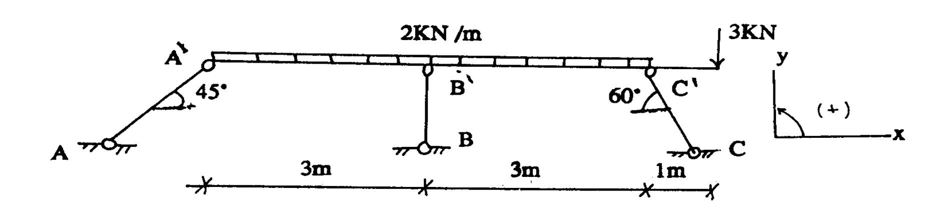
$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad H_A\, h - V_A \ell + p\ell \frac{\ell}{2} = 0$$

$$\therefore h\, H_A = p\ell\ell - p\frac{\ell^2}{2} \quad \rightarrow \quad H_A = \frac{p\ell^2}{2\, h} \rightarrow$$

ويتضح من هذه النتيجة أن المعادلة الثالثة للاتزان تتحقق حيث :

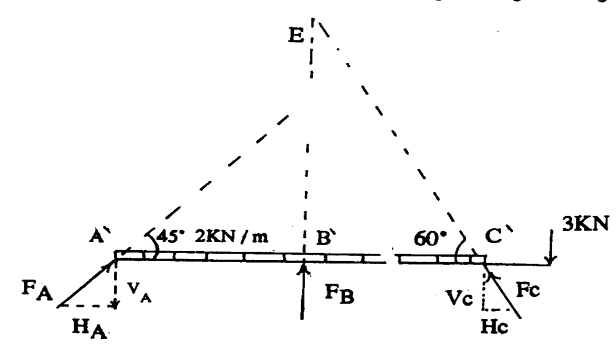
$$\Sigma X = H_A - H_B = P\ \frac{L^2}{2\,h} - \frac{I^2}{2\,h} = 0$$

6 – المنشأة AÀ BB مرتكز على ثلاثة محاور بندولات هى AA` , BB` , CC`
ومعرض للحمل المبين بالشكل ، أوجد قيمة القوة بكل بندول .



الحـــل :

حيث إن البندولات الثلاثة لا تتحمل الاقوى فى اتجاه محورها إذاً فيمكن أن تستبدل بواسطة قوى معلومة الاتجاه ومجهولة القيمة كما بالشكل أسفله .



$$V_A = H_A = F_A \cos 45° = \frac{F_A}{\sqrt{2}}$$

$$V_C = F_C \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} F_C \quad , \quad H_C = F_C \cos 60° = \frac{F_c}{2}$$

$\Sigma M_D = 0 \quad \rightarrow$ (D محددة بالرسم أعلاه)

بالتعويض عن V_C و H_C بدلالة F_C نجد :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_C(3) - \frac{F_c}{2}(3) - 3 \times 4 = 0$$

$$\therefore F_C = 10{,}928 \text{ KN}$$

وتكون قيم مركبتيها V_C و H_C كما يلي :

$$V_C = 10{,}928 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.464 \text{ KN} \uparrow$$

$$HC = 10.928 \times \frac{1}{2} = 5.464 \text{ KN}$$

$\Sigma M_E = 0$ (E محددة بالشكل السابق)

$$- V_A(\overline{AB}) + H_A(BE) - 3 \times 4 = 0$$

بالتعويض عن V_A و H_A بدلالة F_A نجد :

$$- \frac{F_A}{\sqrt{2}}(3) + \frac{F_A}{\sqrt{2}}(\overline{C`B`} \tan 60°) - 3 \times 4 = 0$$

ومنها يمكن إيجاد المركبتين الأفقية والرأسية :

$$\therefore F_A = 7{,}727 \text{ KN}$$

$$V_A = \frac{7.727}{\sqrt{2}} = 5.464 \text{ KN}$$

$$H_A = \frac{7.727}{\sqrt{2}} = 5.464 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma M_{C'} = 0 \quad \rightarrow \quad -V_A(6) - V_B(3) + 2X6X - 3XI = 0$$

$$\therefore V_B = 0.072 \text{ KN} \uparrow$$

تحقيق النتائج :

$$\Sigma X = H_A - H_C = 5.464 - 5.464 = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_C + V_B - 2 X 6 - 3 = 5.464 + 9.464 - 15 + 0.072 = 0$$

3.10 – تمـــارين :

1 – نجفة دائرية وزنها (100N) تحملها ثلاث سلاسل تصنع أنصاف الأقطار التى تربطها مع المركز فى المسقط الأفقى زوايا مقدارها (120°) . المطلوب إيجاد الشد فى كل سلسلة .

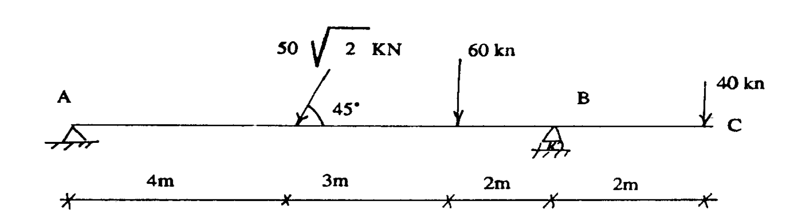
2 – قوتين ($|F_1| = 50N$) , ($|F_2| = 60N$) خطاعملهما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AO}$ على الترتيب حيث A(1,3,0) ، B(0,1,2) ، O(0,0,0) . والمطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع هاتين القوتين .

3 – رجل يشد قضيباً وزنه (100N) بقوة مقدارها (50N) من أحد طرفيه . والطرف الآخر للقضيب مستند على الأرض . فإذا علم أن طول القضيب (2m) وفى وضع الاتزان أصبحت الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأرض 30° . والمطلوب إيجاد :

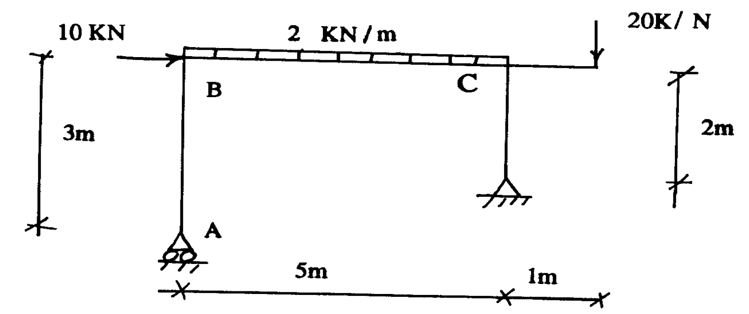
(أ) زاوية ميل قوة الشد على الأفقى فى وضع الاتزان .

(ب) ردود أفعال الأرض .

4 – المطلوب إيجاد ردود أفعال الكمرة التالية :



5 – أوجد ردود أفعال الهيكل التالى :



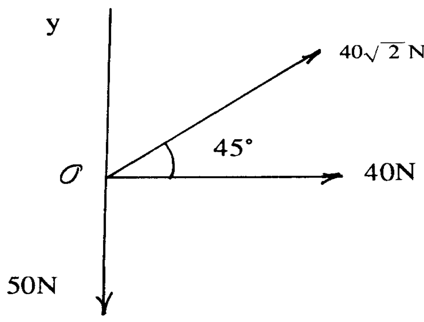
تمـــارين :

1 – أوجد عزم القوة ($\vec{F} = 150$ N) حول النقطة C ، وذلك بتطبيق التعريف المباشر للعزم . أوجد كذلك عزم تلك القوة حول النقطة O بعد تحليلها إلى مركباتها الأساسية .

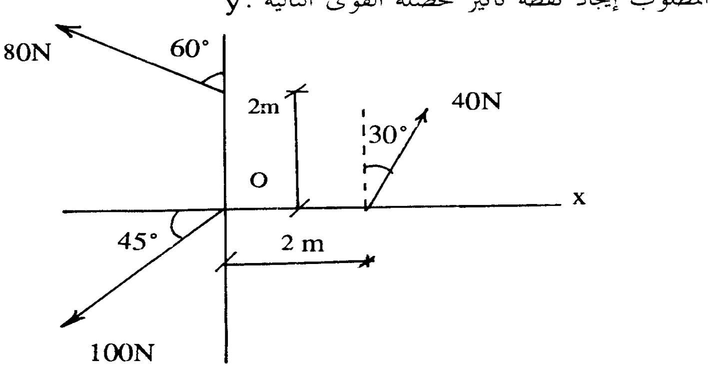


2 − قوة ($|F|$ =SON) خط عملهما معرف بالنقطتين : (A(1,3,0 و (B(0,1,2
ونقطة تأثيرها هى A . والمطلوب :
(أ) اختزال تلك القوة حول النقطة O .
(ب) اتجاهات القوة التى تكافىء تلك القوة .

3 − تؤثر مجموعة القوى المبينة بالشكل بالنقطة O . والمطلوب إيجاد القوة التى تجعل تلك المجموعة محصلتها رأسية .



4 المطلوب إيجاد نقطة تأثير محصلة القوى التالية : y



الباب الرابع

عناصر الحل البيانى

نتعرض فى هذا الفصل لطرق حل مسائل الإستاتيكيا بيانياً ، وأهمية هذا الموضوع تكمن فى التطبيقات الهندسية مثل حل مسائل الجمالونات حيث يصعب حل مسائل الجمالونات تحليلياً ، وهذا سوف نتعرض له تفصيلاً فى فصل خاص عن الجمالونات ، إلا أننا فى هذا الفصل نعطى فكرة عن كيفية الحل البيانى لبعض مسائل الاتزان وكيفية حساب ردود الأفعال بيانياً .

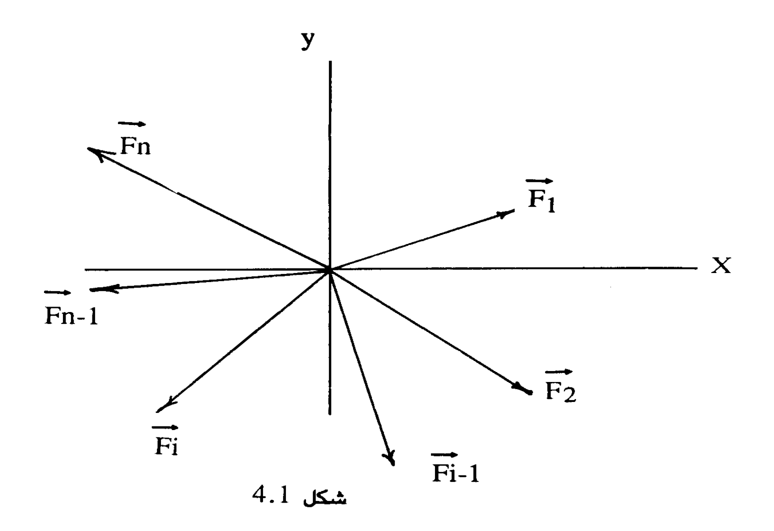
وكما سبق ذكره فإن القوة تعتبر متجهاولتعريفه يحتاج إلى أربعة عناصر ، ويضاف لهذه العناصر الأربعة فى علم الإستاتيكا البيانية ما يعرف بمقياس الرسم ، وهو النسبة بين الطول المرسوم به القوة والقيمة الحقيقية لها ومن ثم فهو علاقة بين الوحدة الطولية ووحدة مقياس القوى .

لتبسيط عمليات الرسم فإننا نتعرض فى هذا الفصل للقوى فى المستوى XOY فقط .

4.1 مضلعات القوى :

لتكن مجموعة القوى عددها n : $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ و .... و $\vec{F_i}$ و .... و $\vec{F_n}$

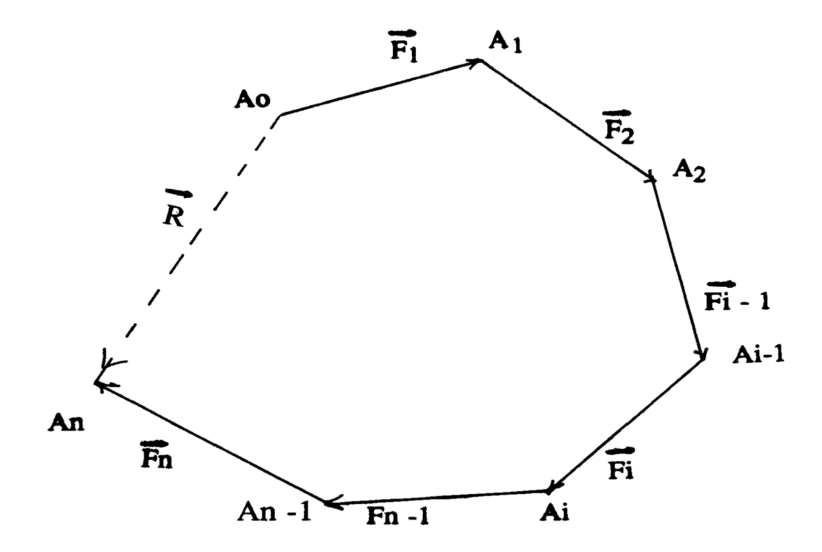
وهى قوى متلاقية وسندرسها حسب الترتيب الاختيارى 1 , 2 , ... n انظر شكل 4.1 .



شكل 4.1

لهذه المجموعة من القوى نختار نقطة A_0 لكى نرسم منها المتجه $\overrightarrow{A_0A_1}$ المكافىء للقوة $\vec{F_1}$ ومن نهايته نرسم المتجه $\overrightarrow{A_1A_2}$ مكافئاً للقوة $\vec{F_2}$ وهكذا حتى $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ المكافىء للقوة $\vec{F_n}$. المخطط أو الكنتور المضلع المبين بالشكل 4.2 ، والحاصل عليه كما هو موضح أعلاه يسمى مضلع القوى . المتجه A_0A_n هو المحصلة لهذه المجموعة من القوى .

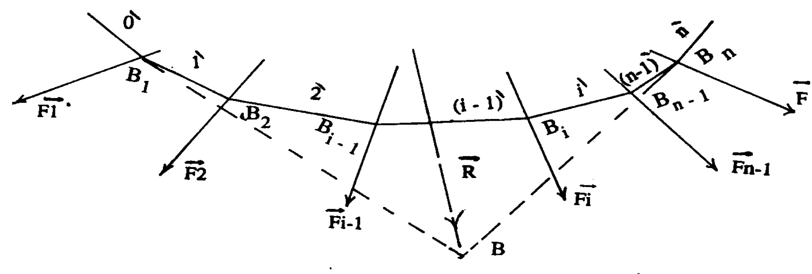
فى حالة انطباق A_0 على A_n تصبح المحصلة O ومن ثم يقال إن مجموعة القوى متزنة . إذاً كل جسم صلب تحت تأثير قوى متزنة يكون لديه مضلع قوى مقفل .



4.2 مضلع الأشعة القطبى :

لتعيين موضع المحصلة لمجموعة من القوى نرسم ما يعرف بمضلع الأشعة القطبى ، وهو الذى سندرسه فى هذه الفقرة :

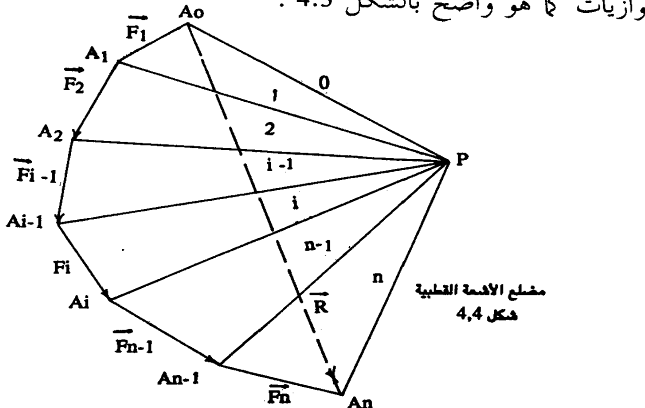
لنعتبر مجموعة القوى بالشكل 4.3 التالى والتى يراد رسم مضلع الأشعة القطبى لها ، فنختار نقطة بداية ولتكن A_0 شكل 4.4 ، ونرسم منها المتجه $\overrightarrow{A_0A_1}$ مكافئاً للقوة $\vec{F_1}$ ، ونستمر فى عملية رسم القوى – كما أسلفنا فى الفقرة السابقة – حتى نحصل على المحصلة عن طريق مضلع القوى ، وعلى نفس الشكل نختار نقطة ، ولتكن P وهى تعرف بالقطب ، ومنها نرسم خطوطاً – أشعة – تصل تلك النقطة بالنقط A_0 ، A_1 .... إلخ ، وتعرف هذه الخطوط بالأشعة القطبية ، ومن ثم يعرف هذا الشكل بمضلع الأشعة القطبية شكل 4.4 .



شكل 4.3

لكى نوقع المحصلة الآن بالشكل 4.3 بين مجموعة القوى التى تمثلها ، نعود لشكل 4.3 ونختار نقطة ما مثل B_1 مثلاً على خط عمل القوة $\vec{F_1}$ ، ومنها نرسم موازياً للمستقيم (الشعاع) صفر وليكن صفرَ (Ó) ، ونرسم كذلك // للشعاع 1 ، وليكن الشعاع 1 ليلاقى خط عمل القوة $\vec{F_2}$ فى النقطة B_2 ، ومن هذه النقطة نرسم موازياً للشعاع 2 ليعطينا الشعاع 2́ والذى يقطع خط عمل القوة التالية فى B_{i-1} وهكذا حتى


تتم جميع الموازيات كما هو واضح بالشكل 4.3 .



مضلع الأشعة القطبية
شكل 4.4

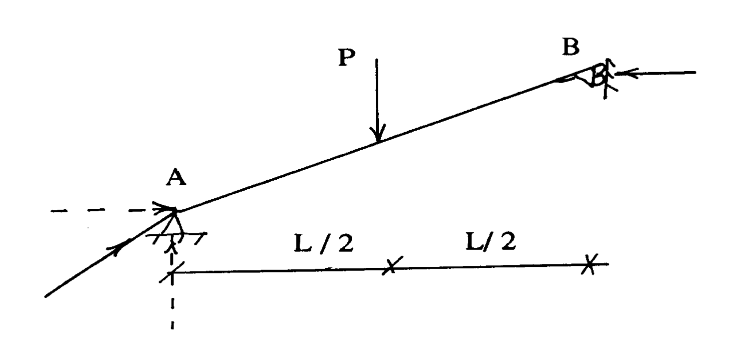
بعد عمل كافة الموازيات نمد الشعاع الأول ´O والأخير `n حتى يلتقيا في نقطة ولتكن B انظر شكل 4.3 . من النقطة B نرسم موازيا للمتجه A_0A_n والذى يمثل المحصلة ، ومن ثم يمكننا الحصول على موقع المحصلة بين مجموعة القوى التى تكافئها ، وكما سبق ذكره إذا انطبقت A_0 على A_n تكون المجموعة فى حالة اتزان حيث إن المحصلة تصبح صفراً .

4.3 منحنى الضغط :

منحنى الضغط هو منحنى مضلع أشعة قطبى خاص فيه يتطابق القطب P على نقطة بداية مضلع الأشعة القطبى A_0 ، وبعبارة أخرى A_0 وP هما نفس النقطة بالشكل 4.4 .

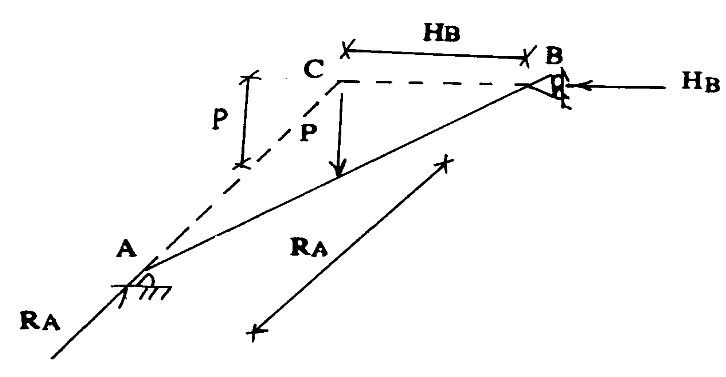
4.4 تطبيقات على الإستاتيكا البيانية :

١ – الكمرة AB بالشكل أسفله تقع تحت تأثير قوة مركزة P . أوجد بيانياً قيمته ردود الأفعال لهذه الكمرة .



الحـــل :

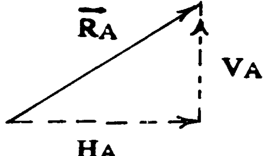
حيث إن الكمرة يجب أن تكون متزنة ، إذاً الثلاث قوى يجب أن تتلاقى فى نقطة واحدة (فقرة 3.8) ولتكن النقطة C ، انظر الشكل التالى :



ويعتبر المثلث ABC هو مثلث التوازن ويصبح خط عمل R_A معروفاً حيث إنه الخط الواصل من الركيزة A إلى نقطة تلاقى القوة الرأسية P مع رد الفعل الأفقى H_B ونقطة التلاقى كما هو واضح بالشكل هى C . من الشكل نجد :

$$\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{H_B} = \overrightarrow{BC}$$

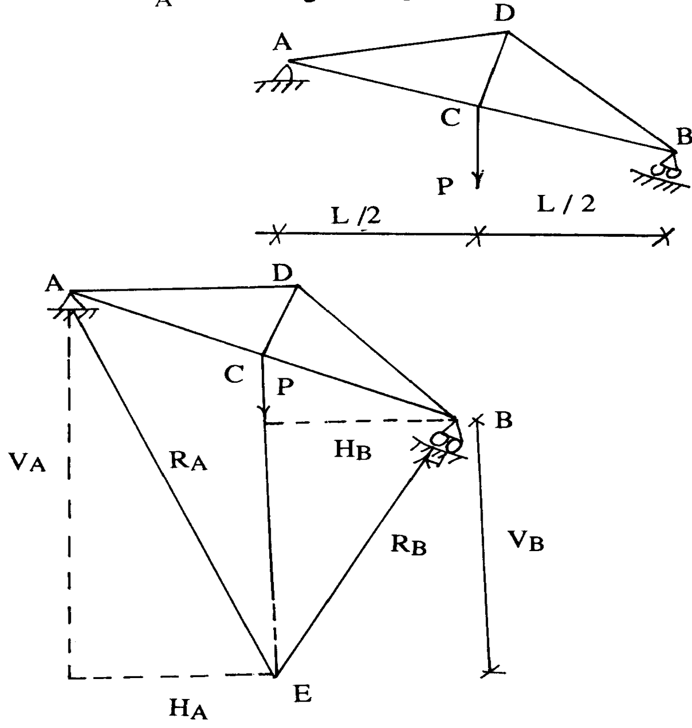
ويمكن إيجاد مركبات R_A الرأسية V_A والأفقية H_A وذلك بإسقاط المتجه AC رأسياً وأفقياً . انظر الشكل .



2 – أوجد ردود أفعال الجمالون ABCD بيانياً . الجمالون واقع تحت تأثير قوة رأسية P عند المفصلة C .

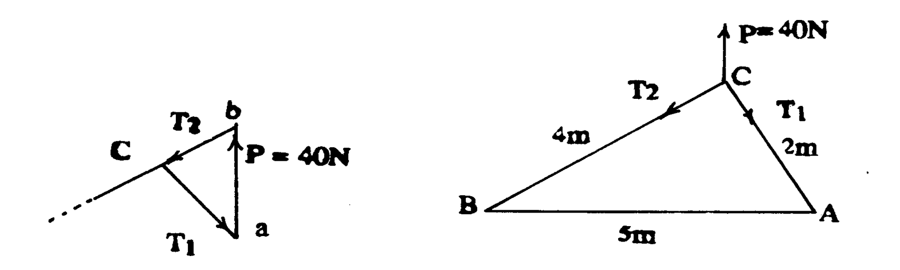
الحـــل :

من تعريف الركائز بالفصل السابق رد الفعل للركيزة B يكون عمودياً على مستوى الركيزة أى ⊥ على AB . وحيث إن الجمالون فى حالة اتزان إذاً الثلاث قوى لابد أن تتلاقى فى نقطة واحدة ، والتى يمكن تعيينها من تقاطع الحمل الرأسى p مع الاتجاه العمودى على AB من B وهو رد الفعل R_B لنحصل على النقطة E . بمعرفة E يكون EA هو المتجه الذى يمثل رد الفعل عند A أى R_A .



بإسقاط كل من $\overrightarrow{R_A}$ و R_B أفقياً ورأسياً يمكن أن نحصل على المركبة الأفقية والرأسية لكل منهما كما هو واضح بالشكل . ويلاحظ أن المركبة الأفقية لكل من $\overrightarrow{R_A}$ و $\overrightarrow{R_B}$ تساوى 1/2 (بمقياس الرسم) وهذا بالطبع ضرورى لتحقيق الاتزان .

3 – خيط طوله 6 متر مثبت من طرفيه B , A . شد إلى نقطة C بواسطة قوة مقدارها 40 N . فإذا كانت المسافة الأفقية بين طرفيه B , A هى 5 متر ، وإذا علم أن AC = 2 متر أوجد بيانياً قيمة الشد فى كل طرف من طرفى الخيط



مضلع القوى تحول إلى مثلث قوى .

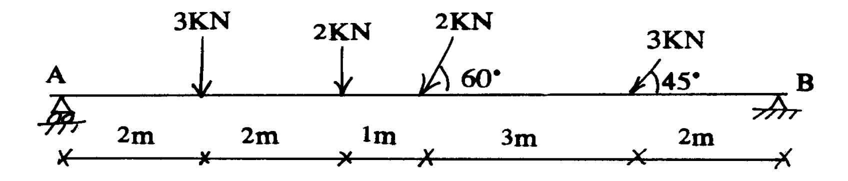
الحــــل :

لحل المسألة بيانياً نبدأ برسم موازى للقوة P بمقياس رسم معين وهى بالطبع رأسية وليكن ab كما هو واضح من مثلث القوى أعلاه .

بما أن القوى الثلاث متزنة فيجب الحصول على مثلث قوى (مضلع قوى) مقفل ، وتكون فيه الأسهم فى اتجاه دورى واحد ، وحيث إن اتجاه القوى بالخيطين معروف فإنه يمكن عمل موازى من b للشد T_2 فيقابل الموازى من a للشد T_1 وبذلك نحصل على مثلث مقفل بالقياس والضرب فى مقياس الرسم نجد قيمة الشد فى كل من الخيطين CB , CA .

$T_1 = 38.9 \ KN \quad , \quad T_2 = 27.4 \ KN$

4 – أوجد بيانياً ردود أفعال الكمرة AB بالشكل أسفله .

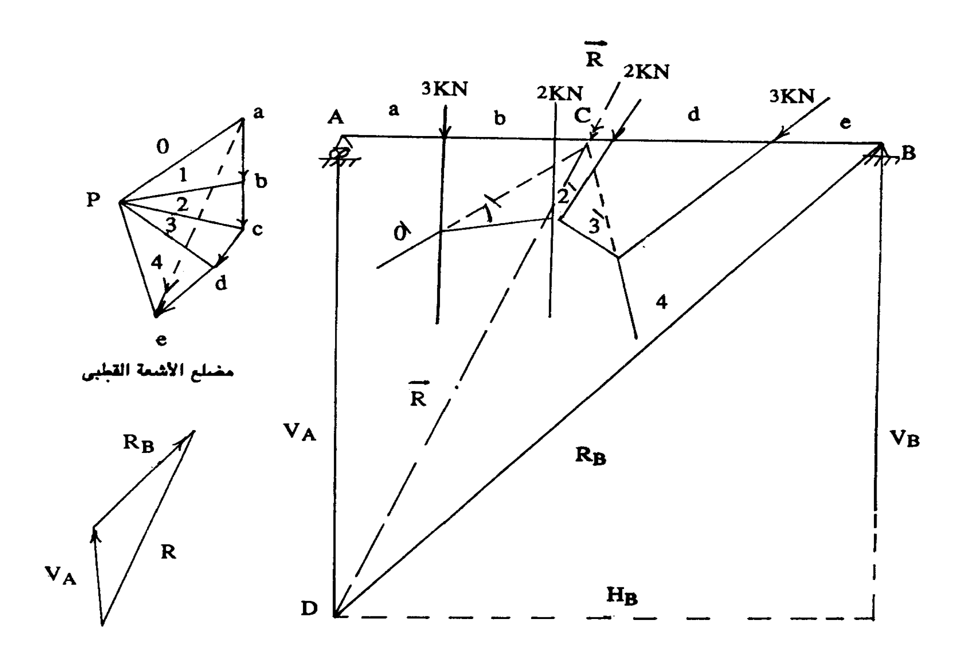


الحـــل :

محصلة هذه المجموعة من القوى يجب أن تكون متزنة مع ردود الأفعال ، فلنبدأ إذاً بإيجاد هذه المحصلة ، وذلك بواسطة مضلع الأشعة القطبى الذى سبق شرحه فى بداية هذا الفصل . انظر تفاصيل الرسم بالشكل التالى .

فى هذه المسألة لرسم مضلع الأشعة القطبىْ نقسم المساحة إلى مناطق كل منطقة مفصولة عن جارتها بخط عمل قوة فمثلاً القوة 3 KN الرأسية تفصل المنطقة a عن b وبالتالى فيمكن أن نسمى هذه القوة الرأسية بواسطة المناطق فتصبح ab أو القوة الرأسية 2KN فتسمى bc وهكذا كل القوى يمكن تسميتها بالمناطق .

بعد عمل مضلع الأشعة القطبى وإيجاد المحصلة ثم توقيعها بين مجموعة القوى ، وذلك كما سبق شرحه . فإننا نعلم أن هذه المحصلة يجب أن تتزن مع ردود الأفعال عند كل من A , B وحيث إن خط عمل المحصلة معلوم ، وكذلك رد فعل الركيزة A معلوم الاتجاه – مجهول القيمة – وهو الاتجاه الرأسى ليكون ⊥ مستوى الركيزة فإننا يمكننا تحديد نقطة تلاقى المحصلة مع رد الفعل عند A ، ولتكن النقطة D . وحيث إن القوى متزنة كما أسلفنا فإن رد الفعل عند B يجب أن يمر بنفس النقطة D ومن ثم فإن اتجاه رد الفعل عند D أصبح هو الاتجاه $\overrightarrow{DB}$.



ويمكن الآن رسم مثلث قوى لكل من المحصلة $\vec{R}$ (معلومة تماماً) ورد الفعل عند كل من A و B وهما معلومان فى الاتجاه ، ومجهولان فى القيمة فتصبح كالمسألة السابقة ، وعن طريق مثلث القوى ، وبمعرفة مقياس الرسم يمكن إيجاد قيم كل من رد الفعل عند A و B - انظر مثلث القوى بالشكل أعلاه .

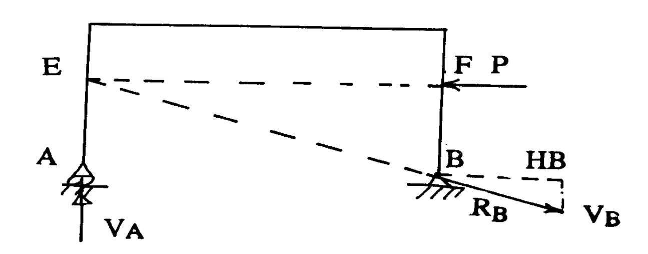
بتحليل R_B رأسياً وأفقياً يمكن إيجاد رد الفعل الرأسى V_B والأفقى H_B ونحصل على النتائج التالية :

$$V_A = 4.9\ KN \uparrow \quad , \quad V_B = 4\ KN \uparrow \ , \quad H_B = 3.1\ KN \rightarrow$$

5 – المطلوب إيجاد ردود أفعال المنشأ ABCD الواقع تحت تأثير القوة P بالشكل التالى

الحـــل :

نطبق فى هذه المسألة نظرية القوى الثلاث بيانياً ، حيث إن الحمل أفقى ، ورد الفعل عند A رأسى أذا سوف يلتقيان على العمود AC وليكن فى النقطة E كما بالشكل أسفله نصل BE لنحصل على اتجاه رد الفعل عند B حيث يجب أن يمر بالنقطة E لتحقيق التوازن تبعاً لنظرية القوى الثلاث .



المثلث BEF هو مثلث القوى ، ويمكن إيجاد قيم ردود الأفعال عن طريق القياس أو بكتابة النسب التالية :

$$\frac{V_A}{\overrightarrow{BF}} = \frac{P}{FE} = \frac{R_B}{EB}$$

ومنها نجد :

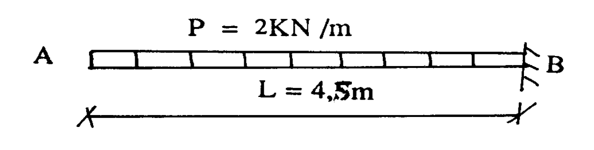
$$\frac{P}{\ell} = \frac{V_B}{a} \rightarrow V_A = P\frac{a}{\ell} \uparrow$$

$$\frac{R_B}{\sqrt{\ell^2 + a^2}} = \frac{P}{\ell} \qquad R_B = P\frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{L}$$

ومركبات R_B هى :

$$V_B = P\frac{a}{\ell} \downarrow \quad , H_B = P$$

6 – الكابولى AB مثبت من طرفه B وحر من A والمطلوب إيجاد ردود أفعال هذا الكابولى عند التثبت B بيانياً . علماً بأن الكابولى معرض لحمل موزع توزيعاً منتظماً على الوحدة الأفقية الطولية .



الحـــل :

قبل إيجاد ردود الأفعال لابد من تقسيم الحمل الموزع ، وبالطبع كلما كان العدد المقسم إليه الحمل كبيراً كلما اقترب من الواقع وأصبح الحل دقيقاً . فى هذه المسألة سوف نقتصر على تقسيم الحمل إلى ثلاث مناطق ، ومن ثم تكون محصلة القوى فى كل منطقة (المناطق مسافاتها متساوية) مساوية لثلث المحصلة الكلية للحمل أى :

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}(P\,L) = \frac{1}{3} \times 2 \times 4.5 = 3 \text{ KN}$$

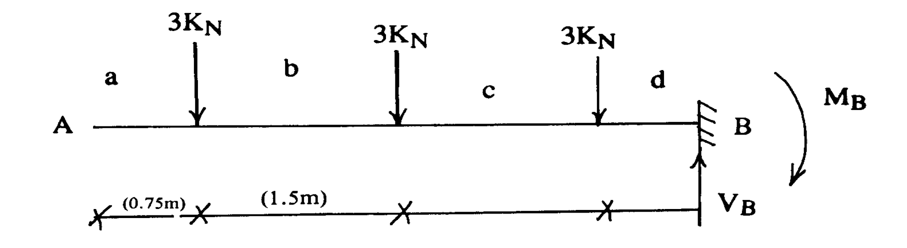
ونقطة تأثير هذه القوى (المحصلات الثلاث) هى منتصف كل منطقة ، وتكون بالتالى على الأبعاد التالية من A :

P_1 على بعد $\frac{1,5}{2} = 0.75$ متراً

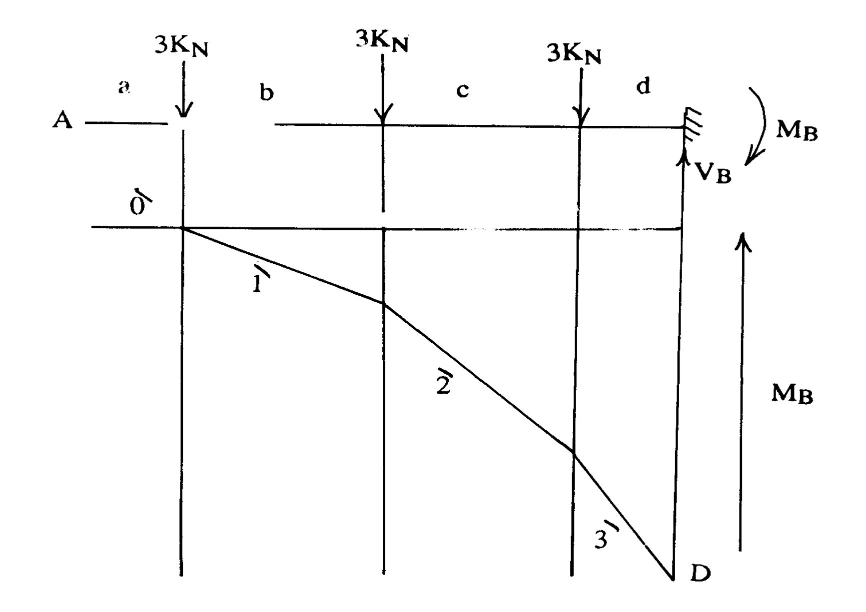
P_2 على بعد $1,5 + \frac{1,5}{2} = 2.25$ متراً

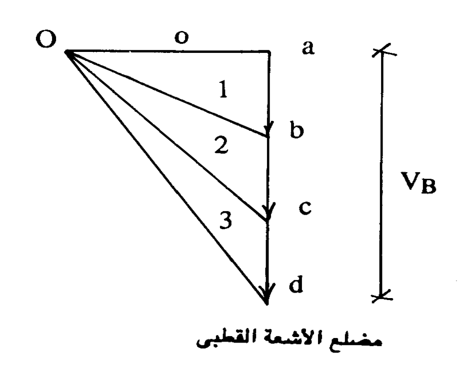
P_3 على بعد $3 + \frac{1,5}{2} = 3.75$ متراً

ونحصل على الشكل التالى للكابولى بعد توزيع القوى :



يمكن الآن تقسيم المساحة إلى مناطق تفصل بين كل منطقة والتالية خط عمل قوى كما هو موضح بالشكل .





مضلع الأشعة القطبى

يمكن الآن أن نرسم مضلع الأشعة القطبى – كما سبق شرحه وكما هو موضح بالرسم أعلاه – وبقياس الطول $\overrightarrow{da}$ نحصل على رد الفعل الرأسى V_B مع مراعاة مقياس الرسم . فى هذه الحالة ولحساب العزم عند B نختار القطب O على نفس الخط الأفقى مع a ومن O نرسم الأشعة ، ونوقعها على القوى بواسطة الموازيات $0'$, $1'$, $2'$, $3'$. الطول الرأسى المحصور بين أول موازٍ $0'$ وآخر موازى $3'$ يعطى قيمة العزم M_B (أى رد الفعل عند B) بقياسه ، وبمراعاة مقياس الرسم يمكن أن نجد النتائج التالية :

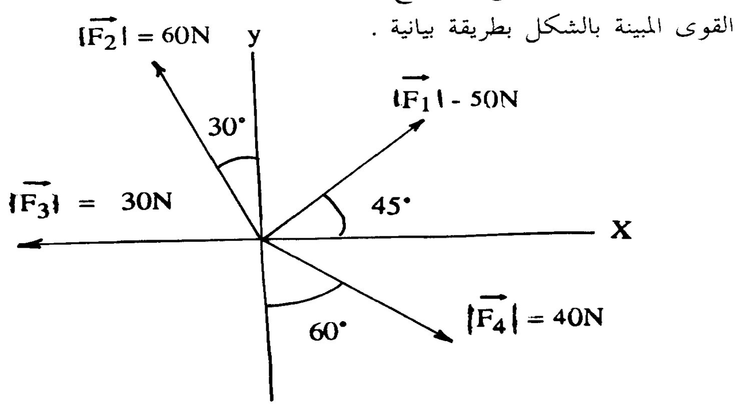
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{da} \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{V_B}| = 9 \text{ KN} \uparrow$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{CD} \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{MB}| = 20.25 \text{ KN . m}$$

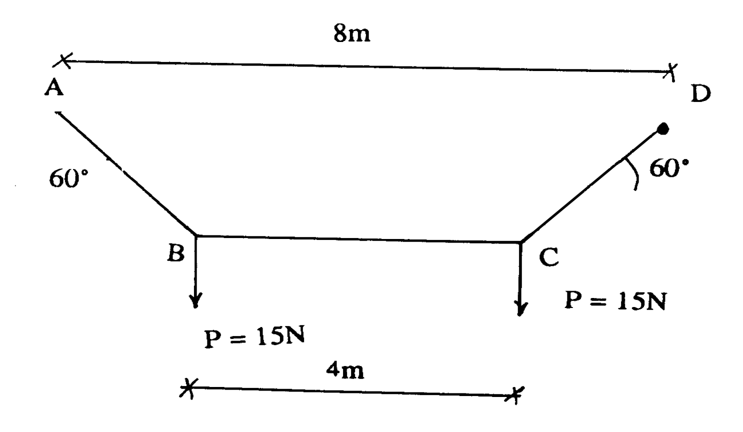
ويكون اتجاه $\overrightarrow{M_B}$ فى اتجاه دوران عقارب الساعة .

4.5 تمـــارين :

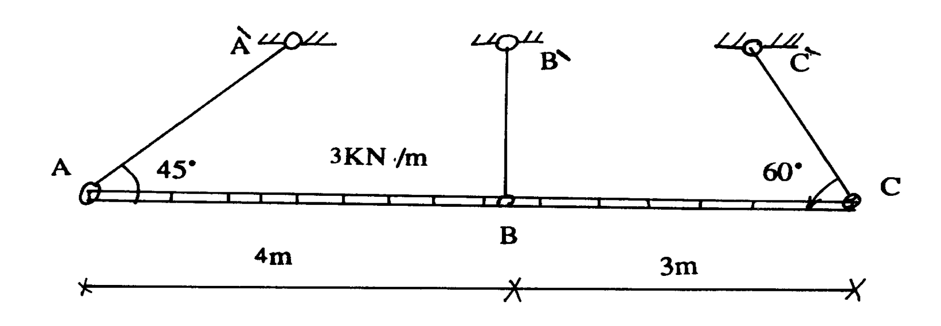
١ – المطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع مجموعة القوى المبينة بالشكل بطريقة بيانية .



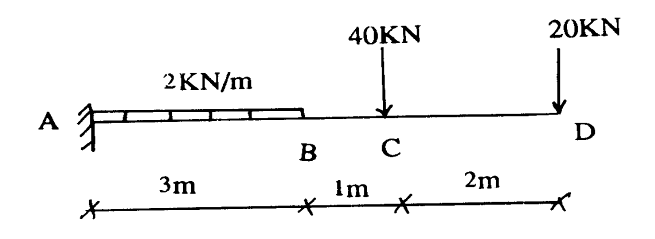
2 – الحبل المبين بالشكل التالى (ABCD) معرض للقوتين الرأسيتين المتساويتين (P = 15N) . والمطلوب إيجاد القوة فى مختلف أجزاءه بطريقة بيانية .



3 – الكمرة (ABC) معلقة بواسطة البندولات الثلاثة \`AA ، \`BB ، \`CC والمطلوب إيجاد القوى المحورية بهذه البندولات الثلاثة بيانياً .



4 – المطلوب إيجاد عزم التثبيت للكابولى التالى بيانياً .





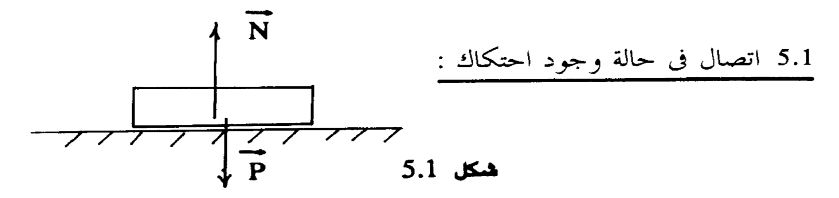
الباب الخامس

الاحتكـــاك

يقصد بالاحتكاك تلك القوة التى تنشأ عن تلامس نقطة مادية مع سطح خشن ، فتعمل تلك القوة على معاكسة حركة هذا الجسم أو تقليل تأثير القوى الخارجية عليه .

يعتبر الاحتكاك إذاً قوة تعمل دائماً فى اتجاه معاكس للقوى المؤثرة ، ولندرس هذا بشيء من التفصيل .

5.1 اتصال فى حالة وجود احتكاك :



شكل 5.1

دعنا ندرس صندوق موضوع على سطح خشن أفقى كما هو موضح بالشكل 5,1 . تعتبر هذه الخزانة فى حالة اتزان ، ويمكن أن نطبق عليها العلاقة (3.7) لتصبح :

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.1)$$

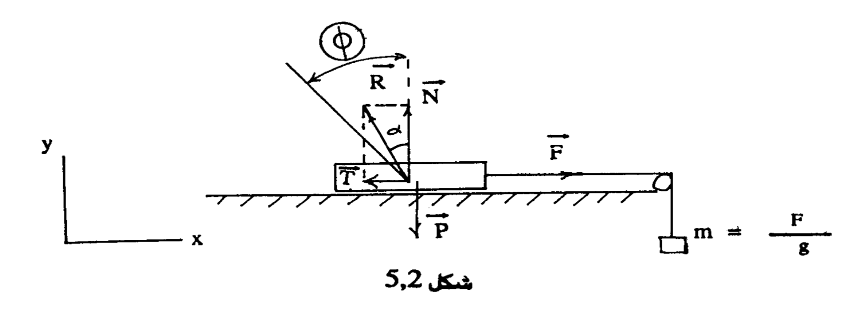
حيث :

وزن الخزانة وهــو رأسى = $\vec{p}$

رد فعل السطح وهو رأس لأعلى = $\vec{N}$

وواضح من شروط الاتزان أن قيمة كل من وزن الخزانة ، ورد فعل السطح عليها متساوية فى المقدار ، ولكن اتجاهاتهما متعاكسة ويجب أن يكون خط عملهما واحد .

ونحاول الآن التأثير على الخزانة بقوة فى اتجاه موازٍ للسطح الخشن لنحصل على الشكل 5.2 .



شكل 5,2

نفرض أن هناك كتلة يمكن زيادتها لنحصل بالتالى على قوة $\vec{F}$ تزداد حسب الحاجة . بواسطة قانون نيوتن يمكن الحصول على قيمة F من العلاقة :

$|\vec{F}| = m |\vec{g}|$ حيث $\vec{g}$ هى متجه يمثل عجلة الجاذبية الأرضية .

لنفرض أن الخزنة سوف تتحرك عندما تزيد قيمة القوة عن F_0 ومن هنا ينشأ لدينا ثلاث حالات وهى :

(أ) قيمة القوة $F_0 > F$.

(ب) قيمة القوة $F_0 = F$.

(جـ) قيمة القوة $F_0 < F$.

الحالة الثالثة (جـ) تعنى أن الخزنة قد تحركت فعلاً ، وهى بالتالى تخضع لقوانين علم الديناميكا وليست الإستاتيكا ، وبالتالى فإننا لن ندرسها فى هذا المجال ، فى الحالة الأولى (أ) تكون الخزنة ثابتة وفى حالة أتزان حيث إن F لم تبلغ بعدالقيمة اللازمة لتحريك الخزنة . أما الحالة الثانية فإن الخزنة تكون على وشك الحركة ، ولكن يمكن أيضاً اعتبارها فى حالة اتزان . ودعنا ندرس هاتين الحالتين (أ) و (ب) بشىء من التفصيل :

الحالة (أ) $F_0 > F$:

تكون القوى فى حالة اتزان وهى تتمثل فى :

- وزن الخزنة $\vec{P}$ وهو رأسى إلى أسفل .
- رد فعل السطح الخشن $\vec{N}$ وهو عكس اتجاه $\vec{P}$ أى رأسى إلى أعلى ، وله نفس خط عمل الوزن $\vec{p}$.
- قوة الشد $\vec{F}$ وهى فى اتجاه أفقى– وهو الاتجاه الموجب للمحور x -
- قوة الاحتكاك $\vec{T}$ وهى فى الاتجاه الأفقى المعاكس للحركة المزمعة أى فى الاتجاه السالب لمحور X – انظر اتجاه المحاور بالشكل 5.2 .

ويمكننا أن نكتب معادلات الاتزان التالية فى اتجاه كل من المحورين الأفقى والرأسى :

$$\vec{P} = \vec{N} \quad , \quad \vec{F} = \vec{T} \qquad (5.2)$$

هذا ويمكن إيجاد محصلة كل من القوتين $\vec{N}$ و $\vec{T}$ ولتكن $\vec{R}$ حيث :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \qquad (5.3)$$

وتكون قيمة $\vec{R}$ كما يلى :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(N)^2 + (T)^2} \qquad (5.4)$$

أما اتجاهها فنفترض أنه يصنع زاوية مقدارها α مع المحور الرأسى بحيث :

$$\tan \alpha = \frac{|T|}{|N|} \qquad (5.5)$$

نلاحظ من المعادلة (5.2) أنه بزيادة قيمة القوة $\vec{F}$ تزداد قيمة قوة الاحتكاك $\vec{T}$ وذلك مع ثبات كل من الوزن $\vec{P}$ ورد الفعل $\vec{N}$.

وبناء على المعادلتين (5.3) ,(5.4) فإن قيمة $\vec{R}$ لابد أن تزداد بزيادة $\vec{T}$ وذلك رغم ثبات $\vec{N}$. ومن المعادلة (5.5) نجد أن الزاوية α لابد أن تزداد قيمتها حيث إنها تتناسب طردياً مع قوة الاحتكاك $\vec{T}$. وتظل الزيادة فى قيمة α – تبعاً لزيادة قوة الاحتكاك $\vec{T}$ – حتى نصل إلى الحالة الثانية من دراستنا وهى الحالة ب .

الحالة (ب) $F_0 = F$:

فى هذه الحالة تكون الخزنة على وشك الحركة إلا أنها مازالت فى حالة أتزان – ليكن نهاية طور الاتزان – ومن ثم فيمكن تطبيق المعادلات من (5.2) إلى (5.5) على تلك الحالة علماً بأن المعادلة (5.5) سوف يطرأ عليها تغيير بسيط وذلك نتيجة لبلوغ قوة الاحتكاك أقصى قيمة لها . إذ أن α فى هذه الحالة ستبلغ أيضاً قيمتها العظمى ويرمز لها بالرمز ϕ حيث :

$$\tan\phi = \frac{|T|}{|N|} = \mu \quad \text{.................................} \quad (5.6)$$

وتعرف ϕ بأنها زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن وهى تختلف تبعاً للمادة المصنوع منها السطح ، وتعتبر خاصية من خواص المادة ، ويمكن تعيينها معملياً إذ أنها ثابتة لكل مادة . وتعرف ϕ كذلك بأنها القيمة الحدية (أو العظمى) للزاوية α .

ويمكن أن يعبر كذلك عن الاحتكاك بما يعرف بمعامل الاحتكاك الإستاتيكى μ وهو مرتبط بالزاوية ϕ كما هو واضح من المعادلة (5.6) . وبديهى أن معامل الاحتكاك الإستاتيكى يعتمد على طبيعة السطح .

يمكن أن نكتب بناء على المعادلة (5.6) أن شرط الاتزان هو :

$$|\vec{T}| < \mu|\vec{N}| \quad \text{..} \quad (5.7)$$

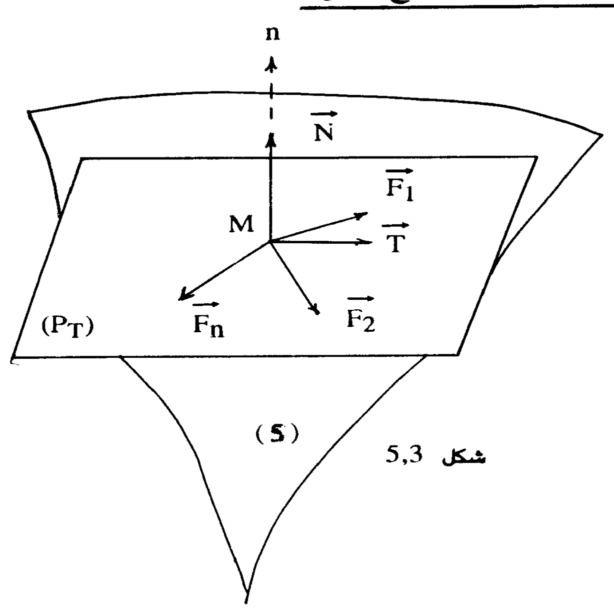
وتعرف المعادلة (5.7) بأنها حالة الاتزان العادية مثل الحالة (أ) .

أما حالة الاتزان الحدى (الحالة « ب ») فإن المعادلة (5.7) تصبح :

$$|\vec{T}| = \mu|\vec{N}| \quad \text{..} \quad (5.8)$$

ملاحظة هامة : تكون قوة الاحتكاك $\vec{T}$ دائماً عكس الاتجاه المتوقع للحركة .

5.2 اتصال نقطة مادية بسطح خشن :



شكل 5,3

لنفترض أن النقطة المادية M تتصل بالسطح الخشن (s) شكل 5.3 . مجموعة القوى المتلاقية

$\vec{F}_1 \; , \; \vec{F}_2 \; , \; \ldots\ldots \quad \vec{F}_n$

تؤثر على هذه النقطة المادية وبالطبع نجد رد الفعل والذى يكون عمودياً على المستوى (P_t) وهو مستوى مماس ، وحيث إن السطح خشن فلابد أن توجد قوة الاحتكاك $\vec{T}$.

المعادلة (3.7) والتى تحدد شرط الاتزان تكتب فى حالة وجود الاحتكاك كما يلى :

$$\vec{N} + \vec{T} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0 \quad \text{.......................} \quad (5.9)$$

ويجب كذلك تحقيق الشرط الخاص بالاحتكاك :

$$|T| < \mu |N| \quad \text{..} \quad (5.10)$$

حيث $\vec{T}$ (قوة الاحتكاك) تصنع دائماً زاوية قائمة مع رد فعل السطح $\vec{N}$ وبالتالى فهى فى مستوى مماس (P_t) انظر شكل 5,3 .

5.3 أمثلة محلولة :

١ – هناك جسم ينزل على سطح مائل خشن بسرعة ثابتة أعطيت له لحظة انطلاقه . فإذا علم أن هذا السطح يميل على الأفقى بزاوية مقدارها α . أوجد قيمة معامل الاحتكاك μ لهذا السطح بدلالة زاوية الميل α .

الحـــــل :

لدينا من المعادلة (5.8) :

$$T = \mu N \quad \text{.......} \quad (1)$$

ورد الفعل مرتبط بوزن الجسم بالعلاقة

$$N = P \cos \alpha \quad \text{........} \quad (2)$$

وحيث إن الجسم ينزل على الميل بسرعة ثابتة إذاً فالقوة الابتدائية التى بدأ بها لا تتغير ، وبالتالى فإن مركبة الجسم فى اتجاه السطح لا تؤثر على الحركة ، ومن ثم فإن هذه المركبة تكون :

$$F = P \sin \alpha \quad \text{...........} \quad (3)$$

وبما أن الجسم يتحرك فالاحتكاك أصبح غير قادر على منع الحركة وهو فقط يساوى المركبة للوزن فى اتجاه الحركة حيث إن السرعة الابتدائية لا يؤثر فيها الاحتكاك فهى ثابتة :

$$F = T \quad .... \quad (4)$$

بالتعويض فى المعادلة (4) عن كل من F و T من المعادلات الثلاث السابقة لنجد :

$$P \sin \alpha = \mu N = \mu P \cos \alpha$$

$$\therefore \mu = \tan \alpha$$

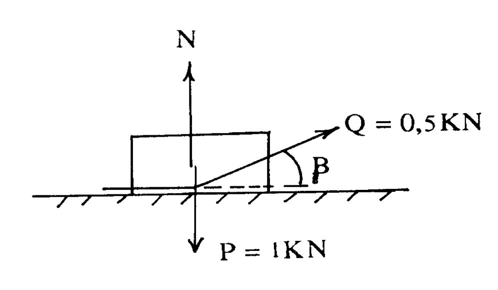
أى أن معامل الاحتكاك هو ظل زاوية الميل α ، وبالتالى فإن α لابد أن تساوى زاوية الاحتكاك الداخلى ϕ للسطح المائل .

$$\tan \phi = \tan \alpha \quad \rightarrow \phi = \alpha$$

2 – صندوق وزنة 1 KN موضوع على سطح خشن أفقى زاوية الاحتكاك الداخلى له مقدارها 30° . أوجد الزاوية β على الأفقى التى يجب أن تؤثر بها قوة مقدارها 0.5 KN حتى تستطيع تحريك الصندوق .

الحـــل :

نلاحظ فى هذه المسألة أننا مازلنا فى حالة الاتزان حيث القوة Q هى التى سوف تبدأ فى تحريك الصندوق ، وهى الحالة (ب) . ومن ثم نطبق معادلات الاتزان (5.2) :



$$N = P - Q \sin\beta = 1 - 0.5 \sin\beta \qquad (1)$$

$$T = Q \cos\beta = 0.5 \cos\beta \qquad (2)$$

أما المعادلة (5.8) فإنها تعطينا :

$$T = N \tan\phi = (1-0.5 \sin\beta) \tan 30° \qquad (3)$$

بالتعويض عن T من المعادلة (2) فى (3) نجد :

$$0.5 \cos\beta = 0.577 - 0.289 \sin\beta$$

$$\cos\beta = 1.154 - 0;578 \sin\beta$$

$$\cos^2\beta = 1.333 - 1.334 \sin\beta + 0.334 \sin^2\beta$$

$$1 - \sin^2\beta = 1.333 - 1.334 \sin\beta + 0.334 \sin^2\beta$$

$$1,334 \sin^2\beta - 1.334 \sin\beta + 0.333 = 0$$

ومنها :

$$\sin\beta = 0.5 \quad \rightarrow \beta = 30°$$

3 – سلم $AB = 2L$ وزنه $\vec{p}$ يستند على حائط رأسى أملس ، ونهايته الأخرى تستند على الأرض حيث معامل الاحتكاك μ :

(أ) أوجد ردود الأفعال العمودية عند نقط التلامس .

(ب) الزاوية α التى يجب أن يصنعها السلم مع الرأسى حتى يظل فى حالة اتزان .

الحـــل :

معادلات الاتزان :

$$\Sigma x = 0 \rightarrow N_2 - T = 0$$

$$\Sigma y = 0 \rightarrow N_1 - P = 0$$

ويمكن كتابة معادلة الاتزان العزوم

حول النقطة A لنحصل على :

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow P\ell \sin\alpha - 2N_2 \cos\alpha = 0$$

ومن هذه المعادلات الثلاث نحصل على :

$$N_1 = P \quad , \quad N_2 = \frac{1}{2} P \tan\alpha \quad , \quad T = \frac{1}{2} P \tan\alpha$$

ولإيجاد الزاوية α نطبق المعادلة (5.8) :

$$T = \mu N_1$$

$$\frac{1}{2} P \tan\alpha = \mu P \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = 2\mu$$

5.4 تمـــارين :

1 – جسم يزن 200 نيوتن موضوع على سطح خشن يميل على الأفقى بزاوية مقدارها 15° . والمطلوب إيجاد زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح المائل لكى يكون الجسم فى حالة اتزان .

2 – كرة موضوعة على أسطوانتين كما بالشكل التالى . فإذا كانت الأسطوانتان موضوعتان على سطح أفقى خشن ($\phi = 30°$) يمنع المجموعة من الحركة . فإذا كان نصف قطر الكرة 10 سم ، ونصف قطر كل أسطوانة 15 سم . ووزن الكرة 250 نيوتن فى حين أن وزن كل أسطوانة 300 نيوتن ، والمطلوب – إذا أمكن – إيجاد وضع الاتزان تبعاً لهذه البيانات .

3 – قضيب AB وزنه 100نيوتن . من الطرف B شد بقوة مقدارها 50 نيوتن تميل على الأفقى بزاوية α . أما الطرف الأخر A فهو مستند على سطح أفقى خشن بحيث يصنع زاوية مدارها 30° . فإذا كان طول القطيب 2 متر . فالمطلوب فى حالة الاتزان ما يلى :

(أ) زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن فى حالة ($\alpha = 85°$) .

(ب) الحد الأدنى للزاوية α حتى يصبح الاتزان ممكناً .

الباب السادس

المفصـــــلات

6.1 مقدمــــة :

ندرس فى هذا الفصل من الكتاب المفصلات الملساء ، ويقصـد بها تلك الوصلات التى تصل بين بعض العناصر بمنشأ ما بحيث تسمح بعملية الدوران حولها ، ودراسة تلك المفصلات تعنى معرفة القوة التى تنشأ بها نتيجة وضعها بهذا المنشأ ، وكيفية انتقال تلك القوى عبر المفصلة ، وسنفترض فى هذه الدراسة ان المفصلات ملساء تماماً ، وقوى الاحتكاك يمكن بالتالى أهمالها .

والمفصلة تعتبر ضرورة فى بعض المنشآت لوصل عناصرها بعضها البعض ، وكما سبق ذكره فهى تسمح بعملية الدوران ، ومن ثم فإن مجموع عزوم القوى حول أى مفصلة يكون صفراً .

6.2 القوى بالمفصـــلات :

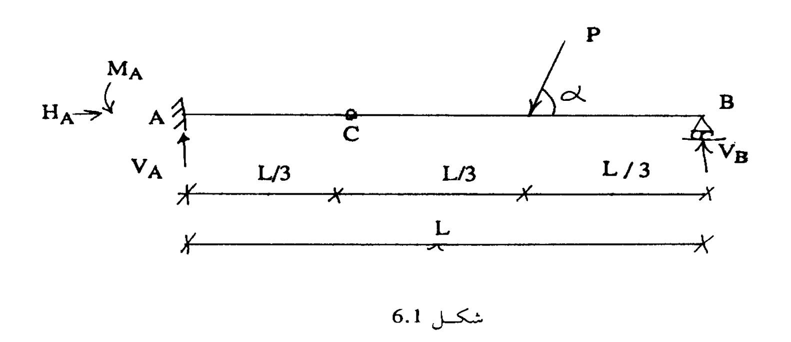
كما أسلفنا فإن المفصلات لا تتقبل أى عزم وبناء عليه فهى تحقق الاتزان فى الاتجاه الأفقى والرأسى فقط إذا كانت بالمستوى والاتزان تبعاً لثلاثة محاور إذا كانت فى الفراغ . ويمكننا كتابة معادلة مجموعة القوى $\overrightarrow{R}$ بالمفصلات كما يلى :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1)$$

ومركباتها بالنسبة للمحاور الثلاثة تكون :

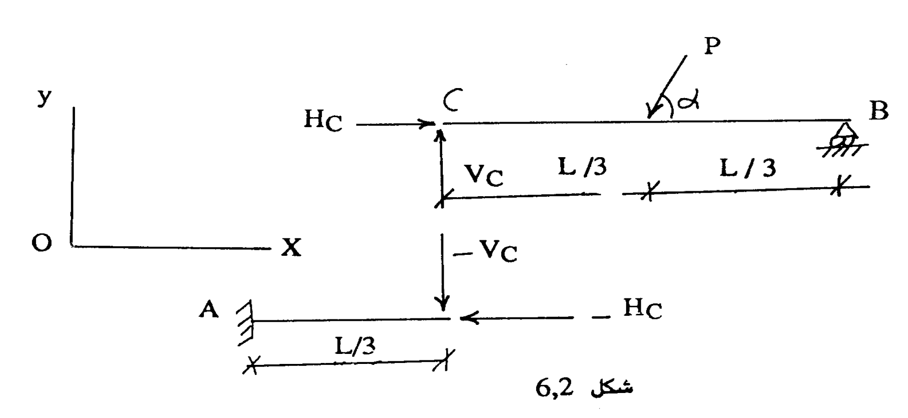
$$\Sigma X = 0 \quad , \quad \Sigma Y = 0 \quad , \quad \Sigma Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2)$$

ولإيضاح فكرة انتقال القوى عن طريق المفصلات الملساء دعنا ندرس الكمرة ذات المفصلة بالشكل 6,1 .



شكل 6.1

لا تظهر القوى بالمفصلات إلا بإجراء عملية قطع الكمرة عند المفصلة ، وذلك لأن القوى بالمفصلات قوى داخلية ، ومن هنا لدراستها سوف ندرس الشكل CB ثم الجزء CA أى نجرى قطع للكمرة عند المفصلة C شكل 6,2 .



شكل 6,2

عند إجراء عملية القطع تظهر القوى بالمفصلات وهى بالمستوى XOY والاتجاه الموجب للمحاور مبين بالشكل 6.2 . نفترض أن هذه القوى هى كما هو مبين بالشكل أعلاه ، وفى الاتجاه الموجب للمحاور فإذا حصلنا على النتيجة بإشارة موجبة فمعنى هذا أن الغرض صحيح وإلا تغير اتجاه السهم . وكما سبق ذكره فلا مجال لوجود قوى على شكل عزم بالمفصلة حيث إنها تسمح بدوران الجزئين CA , CB بالنسبة لبعضهما البعض ولا تقاوم العزم إطلاقاً .

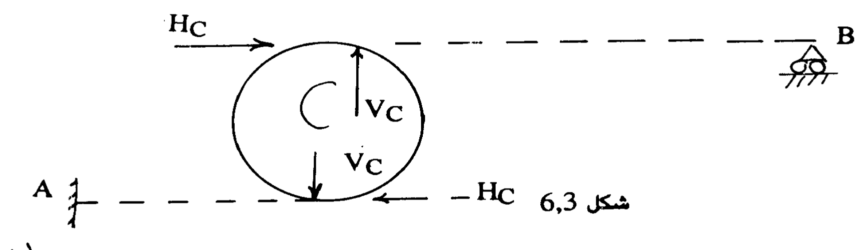
لإيجاد القوتين V_c و H_c نطبق معادلات الاتزان السابق دراستها فى الفصل الثالث للجزء CB :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_C = P \cos \alpha \rightarrow$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_c \frac{2l}{3} - P (\sin \alpha) \frac{l}{3} = 0$$

$$V_C = \frac{P}{2} \sin \alpha \uparrow$$

وبالتالى تكون القوى بالمفصلة C معروفة عن طريق دراستنا للجزء CB . وبالطبع هذه القوى هى نفسها التى تنتقل إلى الجزء CA عبر C على أن عملية النقل تتم مع تغيير الإشارة ، وبالتالى نجد أن الأسهم على الجزء CA تتغير فتصبح V_c إلى أسفل فى حين تصبح H_c إلى اليسار انظر شكل 6.3 . فإذا أردنا الآن تطبيق المعادلات (6.1) و (6.2) على المفصلة C نجد :



شكل 6,3

$$\Sigma X = H_C - H_C = 0$$

$$\Sigma Y = V_C - V_C = 0$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{0}$$

وتستغل خاصية عدم تحمل المفصلات للعزوم فى حساب ردود الأفعال بالمنشآت الهندسية . إذ يمكننا أن نضيف فى حالة المنشآت ذات المفصلات معادلة إضافية – فضلاً عن معادلات الاتـــزان المعتادة الواردة بالفصل الثالث – وهى :

$$\Sigma M_C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3)$$

والمعادلة (6.3) هى ببساطة المعادلة التى توضح أن المفصلة C لا تتحمل العزم ، ولتوضيح كيفية استغلال هذه الخاصية لحساب ردود الأفعال دعنا نعود للكمرة بالشكل 6.1 ، ونحاول حساب ردود أفعالها عند كل من B , A .

نرى أن عدد ردود الأفعال المطلوب إيجادها يساوى أربعة , V_B , M_A , H_A , V_A ، فى حين أن معادلات الاتزان الممكن تطبيقها للاتزان بالمستوى هى ثلاث : (3.3) , (3.6) . ولكن لوجود المفصلة C فإننا يمكن أن نستغل المعادلة (6.3) ، وبالتالى يصبح المنشأ محدداً إستاتيكاً ، حيث تعطى المعادلة (3.8) :

$$n = (ib + r) - (ij + k)$$
$$= (3 \times 1 + 4) - (3 \times 2 + 1) = 0$$

وهنا اعتبرنا أن K = 1 حيث من تعريف K (انظر الفقرة 3.6) نرى أنها شرط إضافى وهو هنا المعادلة (6.3) .

بالاستعانة بالشكل 6,2 وبعد معرفة القوى بالمفصلة C نجد بالنسبة للجزء CB :

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = P \sin\alpha - \frac{P}{2}\sin\alpha = \frac{P}{2}\sin\alpha \uparrow$$

وبدراسة الجزء CA نجد :

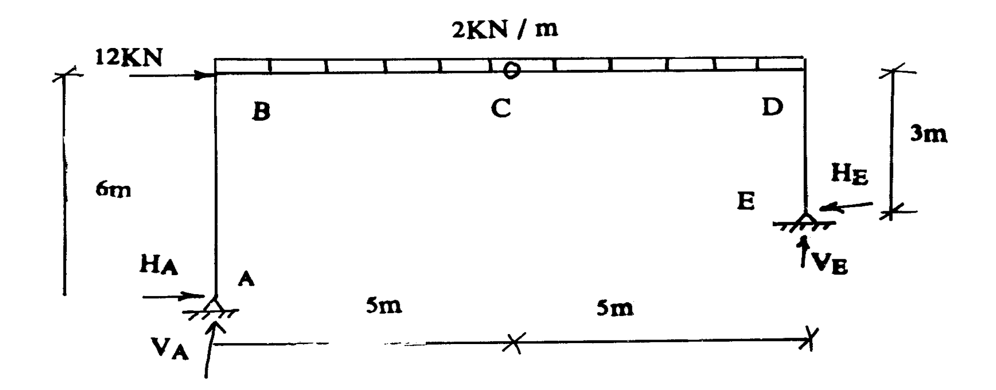
$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A - H_C = P\cos\alpha \rightarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = V_C = \frac{P}{2}\sin\alpha \uparrow$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow V_A = V_C \frac{\ell}{3} - M_A = 0 \rightarrow M_A = \frac{P\,l}{6}\sin\alpha$$

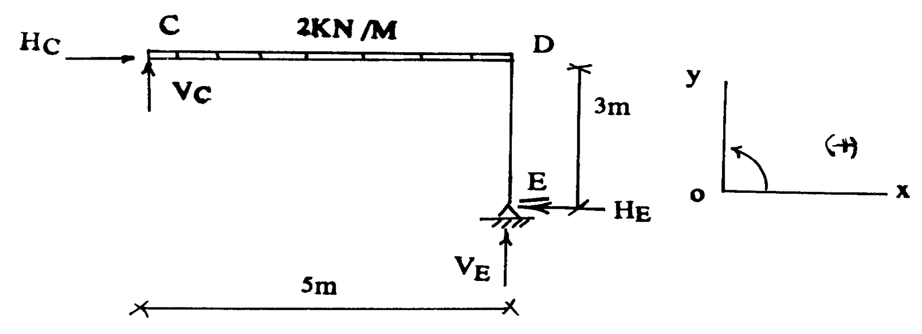
6.3 أمثلة محلولة :

١ – أوجد القوى بالمفصلة C بالهيكل ذى الثلاث مفصلات ABCDE المبين بالشكل أسفله .



الحـــل :

لإيجاد القوى بالمفصلات فإننا نفصل الشكل عند المفصل C إلى جزئين ، ونحاول دراسة الشكل CDE انظر الشكل التالى :



نفترض القوى بالمفصلة هى كالواضح بالشكل أى فى الاتجاه الموجب للمحاور ، نلاحظ أننا لو درسنا اتزان الجزء CDE فسيكون لدينا ثلاث معادلات للاتزان ، ولكن هناك أربعة مجاهيل ، ولذلك فلابد للحصول على أحد هذه المجاهيل قبل دراسة الشكل CDE . وهذا ممكن بدراسة اتزان المنشأ ككل ، بل يمكن إيجاد رد الفعل الأفقى والرأسى كذلك عن طريق دراسة المنشأ الكلى نجد :

$$\sum_{A}^{E} M_A = 0 \rightarrow 10\,V_E + 3\,H_E - 2 \times 10 \times 5 - 12 \times 6 = 0 \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum_{C}^{E} M_C = 0 \rightarrow 5\,V_E + 3\,H_E - 2 \times 5 \times 2.5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$V_E = 13.133 \text{ KN} \uparrow \; , \; H_E = 13.555 \text{ KN} \leftarrow$$

بمعرفة ردود الفعل عند E يمكن بسهولة معرفة القوى بالمفصلة C عن طريق دراسة الجزء CDE أعلاه :

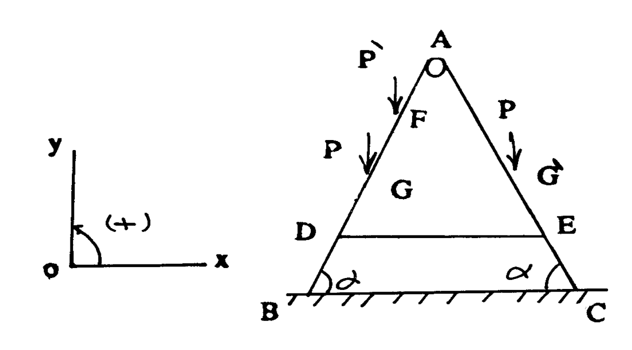
$$\Sigma X = 0 \quad \rightarrow \quad H_c = H_E = 13.555 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad V_c = 13.133 - 2 \times 5 = 3.133 \text{ KN} \uparrow$$

2 – سلم مزدوج AB ، AC حيث A مفصلة بين الفرعين . بإهمال الاحتكاك عند نقطتى الارتكاز C و B . أوجد القوى بالمفصلة وردود الأفعال V_C ، V_B كذلك قوة الشد فى الحبل DE ، وذلك للمعطيات التالية :

وزن كل فرع من السلم = P = 400 نيوتن . الحمل = P = 800 نيوتن .

$AB = AC = \ell = 4 \text{ m} \quad , \quad BD = CE = 1 \text{ m}$
$BG = CG = a = 1.5 \text{ m} \quad , \quad BC = 1.5 \text{ m} \quad , \quad BF = 3 \text{ m}$



الحـــل :

لإيجاد ردود الأفعال يمكننا أن ندرس اتزان السلم ، ونطبق معادلات الاتزان التقليدية .

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow - V_B (1.5) + 2P\left(\frac{1.5}{2}\right) + P`(0.75 + 3\cos\alpha) = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{0.75}{4} = 0.1875 \rightarrow \alpha = 79.19°$$

وبالطبـــع يمكـــن من المعادلـــة أعـــلاه إيجاد قيمـــة V_B بعـــد التعويض عن قيم $P`$, P وكذلك $\cos\alpha$ نجد :

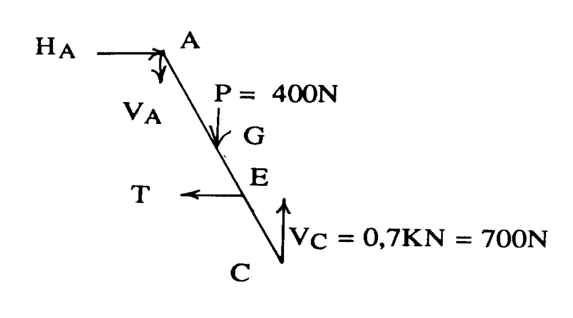
$$V_B = 1100\ N = 1.1\ KN \uparrow$$

بالمثل يمكن إيجاد V_c بحساب العزوم حول B لنجد :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_c (1,5) - 2P\left(\frac{1,5}{2}\right) P`(3\cos\alpha) = 0$$

$$V_C = 700\ N = 0,7\ KN$$

ولإيجاد الشد فى الحبل DE وكذلك القوى بالمفصلة A فلابد من عمل قطاع رأسى مار بالمفصلة لنحصل على الشكل التالى :



بدراسة اتزان الجزء AĠC نجد :

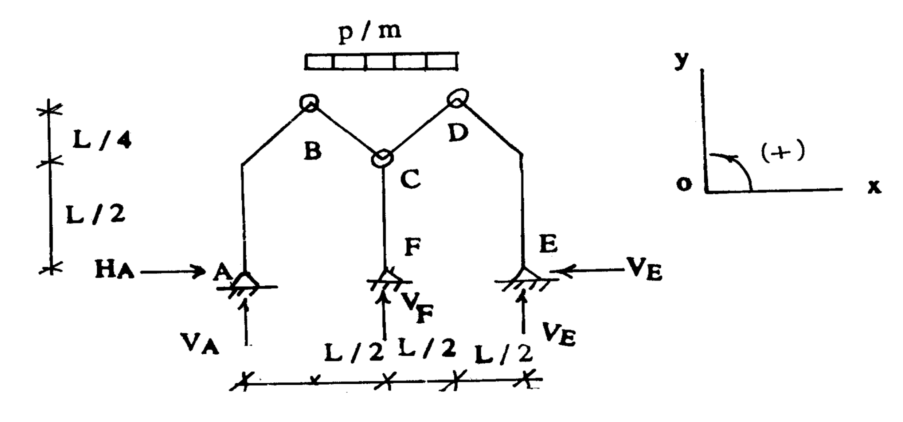
حيث T هو الشد فى الحبل .

$$T = \frac{0.75 \times 700 - 200 \times 0.75}{3 \sin 79.19°} = 127.258 \text{ N} \leftarrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = T = 127.258 \text{ N}$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = V_C - P = 700 - 400 = 300 \text{ N} \downarrow$$

3 – هيكل مكون من الأجزاء AB , BCF , CD , DE انظر الشكل التالى . المطلوب إيجاد ردود الأفعال ، وكذلك القوى بالمفصلات هذا علمـــاً بأن الهيكـــل معـــرض للقـــوة p موزعـــة توزيعـــاً منتظمـــاً على الوحدة الأفقية كما بالشكل .



الحـــــل :

نتيجـة تماثـل الشكـل بالنسبـة لمحور رأسى مار بالـــقضيب FC يمكن أن نستنتج العلاقات التالية :

$$H_A = H_E \quad , \quad V_A = V_E \quad , \quad H_F = 0$$

وبناء على هذه العلاقات فيمكننا دراسة نصف الشكل فقط ، وليكن النصف الأيمن FCDE .

يمكن أن نطبق معادلات الاتزان على هذا الجزء فضلاً عن المعادلة (6.3) الخاصة بالمفصلات C , D .

$$\sum_{D}^{E} M_D = 0 \rightarrow \frac{\ell}{2} V_E - H_E \frac{3\ell}{4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum_{C}^{E} M_C = 0 \rightarrow \ell V_E - V_E \frac{\ell}{2} - p \frac{\ell^2}{8} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من هاتين المعادلتين نجد :

$$H_E = P \frac{\ell}{8} \quad , \quad V_A = \frac{3 P \ell}{16} \uparrow$$

ومن خواص التماثل والمعادلات المستنتجة أعلاه نجد أن :

$$H_E = P \frac{L}{8} \rightarrow \quad , \quad H_A = P \frac{L}{8} \rightarrow \quad , V_A = \frac{3 P L}{16} \uparrow$$

ولإيجاد القوى بالمفصلات فمن التماثل أيضاً نجد أن :

$$V_B = V_D \quad , \quad H_B = H_D \quad , \quad V_C = V_F$$

ولإيجاد القوة V_F (وهى رد الفعل عند F) نطبق معادلة الاتزان على الهيكل بالكامل فى الاتجاه الرأسى :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad V_F = - V_E - V_A + p\ell = \frac{5}{8} p \ell \uparrow$$

$$V_F = \frac{5}{8} PL \uparrow$$

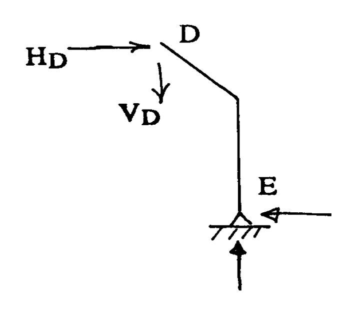
نجرى الآن قطاعاً بالمفصلة D وندرس الجزء DE :

$$\sum_{E}^{D} Y = 0 \rightarrow -V_D = V_E = \frac{3\,pl}{16} \rightarrow$$

$$\sum_{E}^{D} X = 0 \rightarrow -H_D = H_E = \frac{pl}{8} \rightarrow$$

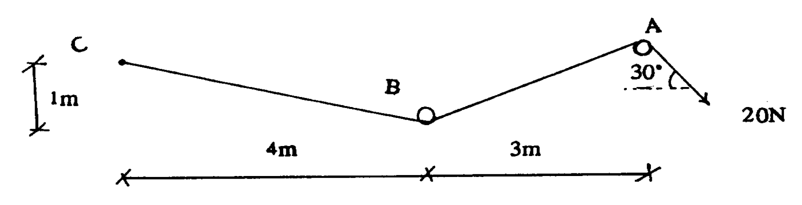
وبالتالى وتبعاً لمبدأ التماثل نجد :

$$V_B = V_D = \frac{3\,pl}{16} , H_B = H_D = P\,\frac{l}{8}$$

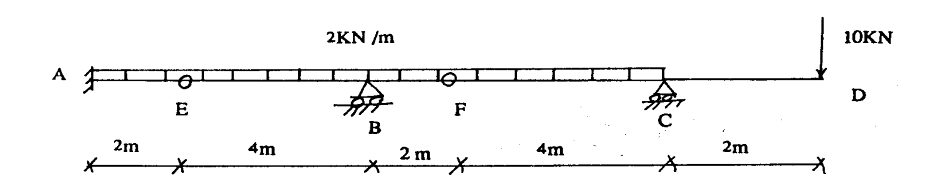


6.4 تمـــــارين :

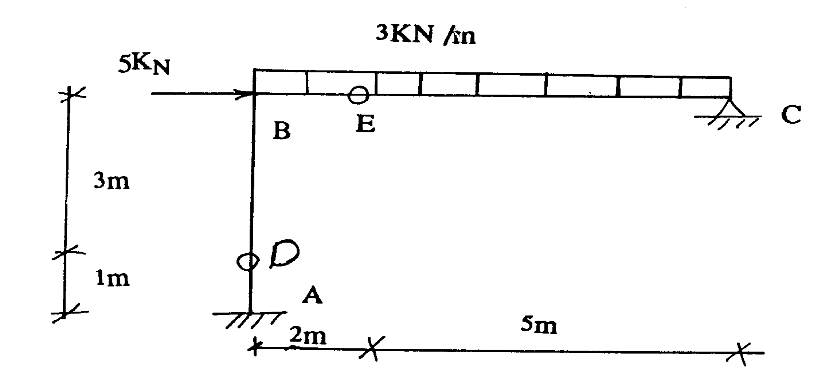
١ – الحبل ABC فى حالة اتزان تحت تأثير القوة 20 نيوتن التى تميل على الأفقى بزاوية 30° ، والتى تؤثر عند المفصلة A ، الحبل ملتف حول المفصلة B إلى أن يصل إلى الوتد C . والمطلوب إيجاد القوى بالمفصلتين A , B ، وكذلك ردود الفعل عند الوتد C وذلك فى حالة الاتزان .



2 – أوجد القوى بمفصلات الكمرة التالية :



3 – أوجد ردود أفعال الهيكل التالى :



الباب السابع

الجمالونـــــات

7.1 – مقدمة :

الجمالونات هى منشآت تتكون من عدة قضبان مستقيمة متصلة بواسطة مفصلات عند نهايتها .

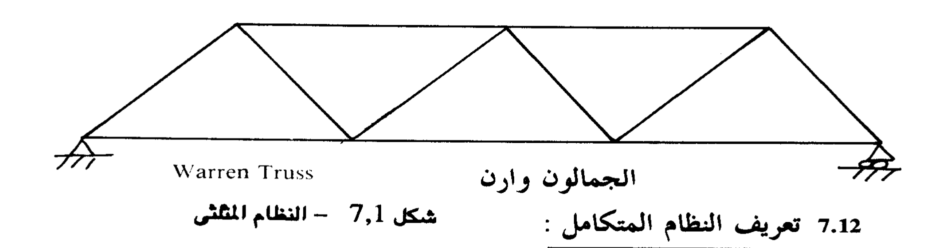
وتعتبر دراسة الجمالونات من التطبيقات الهامة لمادة الإستاتيكا سواء كانت تحليلية أو بيانية .

ومن المتعارف عليه أن قضبان الجمالون تلتقى عند نقاط ، وهذه النقاظ (العقد) لا تتحمل عزم ، ولذلك فإنه يقال : إن تلك القضبان تلتقى عند نقط مفصلية أو مفصلات ، هذا ويفترض فى الجمالونات أن أحمالها تكون فقط عند تلك المفصلات ، ولا يوجد أى حمل على القضيب مباشرة ، ولذلك فالأحمال المنقولة إلى الجمالونات مباشرة تكون أحمالاً مركزة .

ولكى تكون جميع المفصلات فى حالة اتزان فإن محصلة القوى المؤثرة عليها يجب أن تمر بمركزها ، وإلا حدث دوران وبالتالى عزم عند تلك المفصلة .

7.11 – تعريف النظام المثلثى :

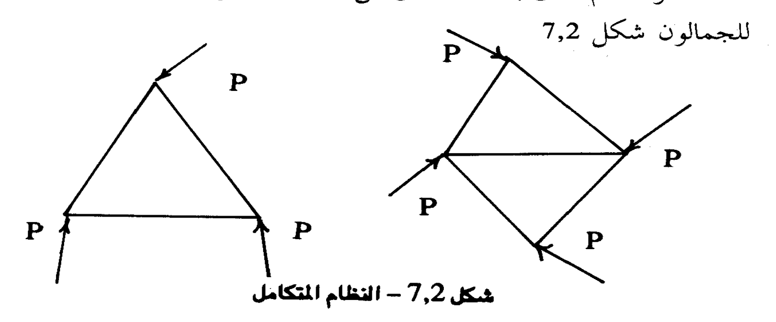
حيث إن الجمالونات تتكون دائماً من قضبان بنهايتها مفصلات فإنها تكون مجموعة من المثلثات ويقال إن النظام مثلثى شكل 7.1 .



شكل 7,1 – النظام المثلثى

7.12 تعريف النظام المتكامل :

هو النظام الذى به الحد الأدنى من القضبان اللازمة لحفظ حالة الاستقرار والثبات للجمالون شكل 7,2

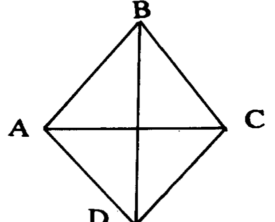


شكل 7,2 – النظام المتكامل

هذا ويلاحظ أن النظام المثلثى يعتبر نظاماً متكاملاً .

7.13 تعريف النظام الزائد :

وهو النظام المتكامل مضافاً إليه قضيب واحد أو أكثر ، شكل 7.3 .

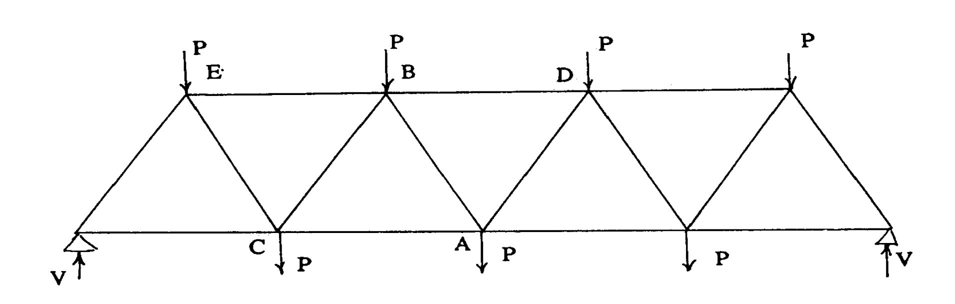


شكل 7.3 النظام الزائد

حيث المفصلات هى D , C , B , A فقط

7.2 اتزان قضيب منفرد :

حيث إن القوى الخارجية تؤثر فقط بالمفصلات فإن قضيب مثل AB شكل 7.4 ، لا يتعرض إلا إلى قوى محورية $\overrightarrow{F_A}$ ، $\overrightarrow{F_B}$ والتى تنتقل إليه عن طريق المفصلتين A , B على الترتيب .



شكل 7.4

7.21 – الاتزان الخارجى لقضيب منفرد :

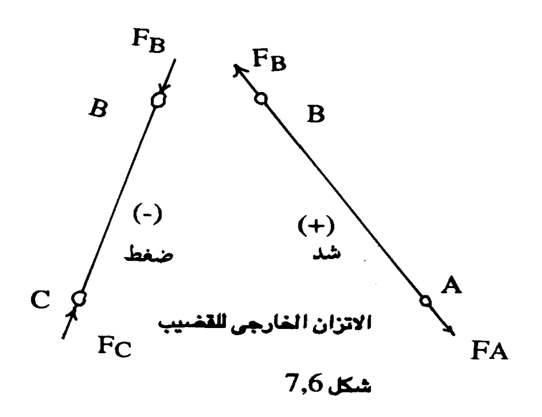
إذا درسنا القضيب AB بمفرده ، شكل 7,5 فنجده معرضاً لقوتين ذواتى قيمة واحدة واتجاه مختلف F_A ، F_B ، وهذا بالطبع حتى يكون القضيب AB فى حالة اتزان خارجى تحت تأثير هاتين القوتين .

القضيب إذاً معرض لقوى محورية ، والتى نعتبرها موجبة إذا كانت – كما الشكل قوة شد .

$$F_A = F_B$$

F_B
B
(+)
قضيب متزن تحت تأثير قوى الشد الخارجية
A
F_A

شكل 7,5

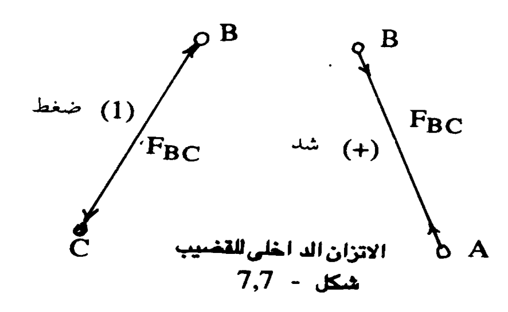


الاتزان الخارجى للقضيب

شكل 7,6

7,22 الاتزان الداخلى لقضيب منفرد :

القضيب AB له رد فعل بالنسبة للقوتين F_A ، F_B وهذا يتمثل فى القوة المحورية الداخلية F_{AB} ، شكل 7,7 ، ويقال إن القضيب فى حالة اتزان داخلى .



الاتزان الداخلى للقضيب
شكل - 7,7

ويلاحظ أن F_{AB} تضاد كل من F_A و F_B ويجب أن تساويهما، وذلك تبعاً لقانون نيوتن ، وأيضاً لكى نحصل على اتزان كل من المفصلتين B , A .

$$\therefore F_{AB} = F_A = F_B$$

والمعروف أن القوى الداخلية هى دائماً التى يراد إيجاد قيمتها ، ومن ثم فإننا عندما ندرس جمالون ، فإننا ندرس دائماً الاتزان الداخلى ، لإيجاد هذه القوى ، ومن الآن فصاعداً فإننا لن نتكلم إلا عن الاتزان الداخلى ، ولذلك فسوف نسميه الاتزان ، ويفهم أن المراد هو الاتزان الداخلى للقضبان .

7.3 الجمالونات المحددة والغير محددة إستاتيكياً :

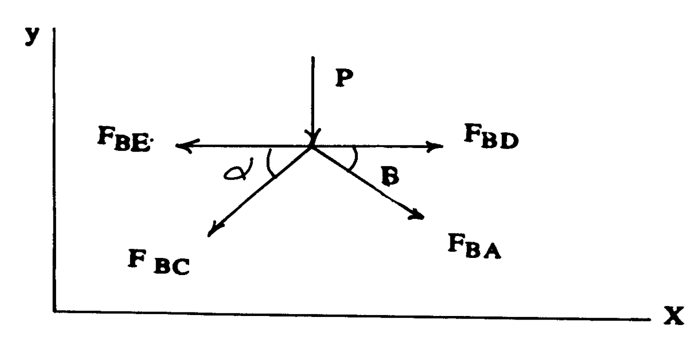
الجمالون يكون خارجياً محدداً إستاتيكياً إذا أمكن إيجاد ردود الأفعال بواسطة معادلات الاتزان فقط ، وفى حالة عدم إمكان ذلك يكون الجمالون غير محدد أستاتيكياً خارجياً ، ومن المعلوم أنه يمكننا دائماً كتابة معادلتين للاتزان – لا يوجد عزوم – عند كل مفصلة ، وذلك فى الاتجاهين الأفقى والرأسى ، شكل 7.8 يمثل المفصلة B بالجمالون شكل 7.4 .

يلاحظ أننا افترضنا القوى بالقضبان شد (السهم خارج من B) فإذا ما كانت أحداها معلومة بأنها ضغط فنضعها بقيمة سالبة فى المعادلة . وهذا الافتراض يقلل من الأخطاء .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{BD} - F_{BE} \cos\beta - (-F_{BC}) \cos\alpha = 0$$

فى هذه المعادلة وضعت F_{BC} بين الاقواس سالبة حيث إننا نعلم من البند السابق بأنها ضغط على عكس الاتجاه المفترض بالرسم .

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -P - F_{BA} \sin\beta - (-F_{BC}) \sin\alpha = 0$$



شكل 7,8

فى حالة وجود n مفصلة وعدد b قضيب فإنه يمكننا الحصول على (2 n) معادلة لإيجاد القوى المحورية بالقضبان b ، ونلفت نظر القارىء إلى أن القوى الخارجية يمكن أن تكون رد فعل معلوم القيمة ، وذلك عند مختلف الركائز ، وبناء على ذلك فإن هناك ثلاث معادلات – معادلات الاتزان الثلاث – استعملت لإيجاد ردود الأفعال فيكون عدد المعادلات المتبقى (2n - 3) .

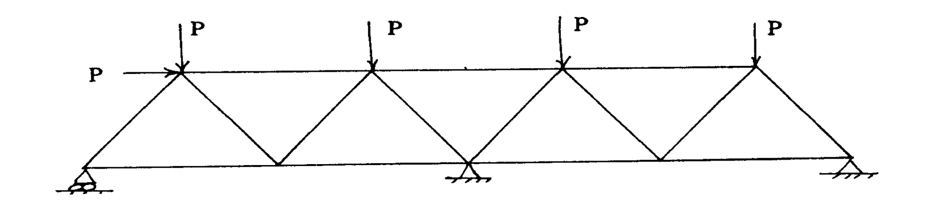
يمكننا الآن دراسة ثلاث حالات :

(أ) $(2n - 3) > b$ ويكون الجمالون غير مستقر (حالة يجب إلا تحدث) .

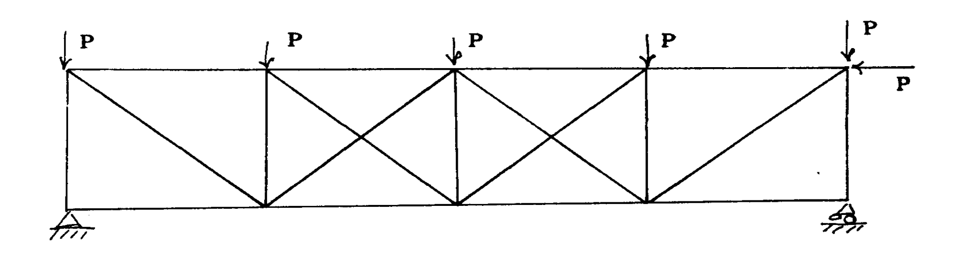
(ب) $(2n - 3) = b$ ويقال : إن الجمالون محدد إستاتيكياً داخلياً .

(جـ) $(2n - 3) < b$ ويقال : إن الجمالون غير محدد إستاتيكياً داخلياً (شكل 7,9 ب) .

فى هذا الفصل سوف ندرس فقط الجمالونات المحددة إساتاتيكياً .



(أ) جمالــون غير محدد إستاتيكيــاً خارجيــاً (عدد ردود الأفعـال يزيـد عن معـادلات الاتــزان) ولكنــه محدد إستاتيكيــــاً داخلياً .

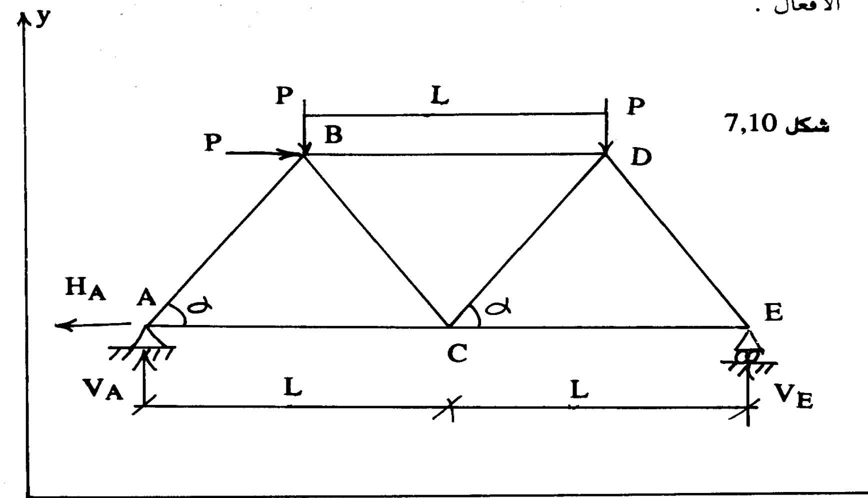


(ب) جمالـون محدد إستاتيكيــاً خارجيــاً ، وغير محدد إستاتيكيــاً داخلياً .

7.4 حساب القوى الداخلية بالقضبان :

7.41 طريقة اتزان المفصلات :

لتوضيح هذه الطريقة دعنا ندرس الجمالون المبين بالشكل 7.10 . لكل مفصلة يمكننا – كما أسلفنا – كتابة معادلتين للاتزان فى الاتجاهين الأفقى والرأسى ، وذلك بعد إيجاد ردود الأفعال .



شكل 7,10

باعتبار ردود الأفعال معروفة يمكننا الآن دراسة المفصلة A ، شكل 7.11 .

y
F_{AB}
H_A
α
F_{AC}
V_A
X

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{AC} + F_{AB}\cos\alpha - H_A = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A + F_{AB}\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

من هاتين المعادلتين يمكننا إيجاد القوى فى القضيبين AB ، وكذلك AC أى F_{AB} و F_{AC} بإشارات سالبة فهذا يعنى أن الاتجاه المفترض خطأ ويجب أن يعكس .

بعد معرفة مختلف القوى لدى المفصلة A - F_{AB} ، F_{AC} – نواصل دراسة بقية المفصلات ولتكن المفصلة التالية B مثلاً ، وذلك حتى تستكمل القوى بكل القضبان .

ملاحظة هامة :

المفصلة التى تدرس يجب أن يكون بها قضيبان مجهولان على الأكثر حيث إنه يوجد معادلتان فقط للاتزان لدى كل مفصلة ، ومن ثم فإن فى المثال السابق بعد دراسة المفصلة A فإننا نتحول لدراسة B وليس C . أما بعد دراسة B فيمكننا التحول لدراسة C وهكذا حتى النهاية .

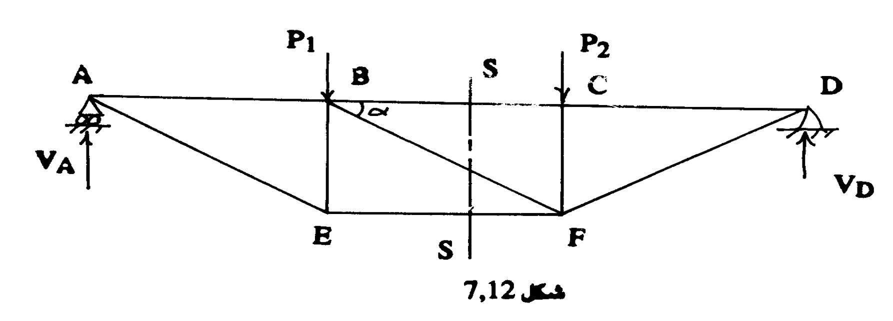
وكما سبق ذكره فإن عدد المعادلات الكلى الممكن الحصول عليه هو :

$$(2 n - 3)$$

حيث n هو عدد المفصلات ، وبالتالى فإن عدد القضبان b يجب أن يكون مساوياً (2 n - 3) لكى تحل المسألة بهذه الطريقة .

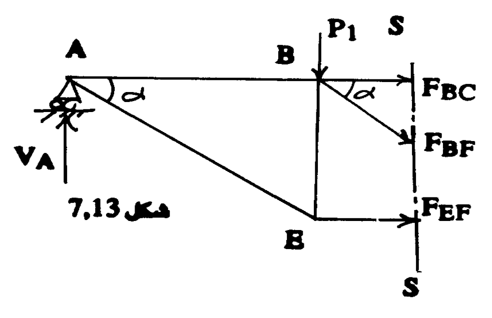
7.42 طريقة المقاطع :

لندرس الجمالون بالشكل 7.12



شكل 7,12

لابد للجمالون أن يكون متزناً تحت تأثير مجموعة من القوى (فعل ورد الفعل) ولتكن التى بالشكل 7.12 . لندرس مقطعاً مثل S-S والذى يقسم الجمالون إلى جزئين – ليس بالضرورة متساويين – ونختار دراسة الجزء الأيسر شكل 7.13 .



شكل 7,13

القوى التى تنقل بواسطة القضبان من الناحية اليسرى إلى الناحية اليمنى هى :

$$F_{EF} , F_{BF} , F_{BC}$$

وللجزء الأيسر بالشكل يمكننا كتابة معادلات الاتزان الثلاث :

$$\Sigma X = 0 , \Sigma Y = 0 , \Sigma M = 0$$

بواسطة هذه المعادلات يمكن إيجاد القوى الداخلية بالقضبان الثلاثة EF , BF , BC .

من هذا نستنتج أن المقطع S - S يجب أن يقطع على الأكثر ثلاثة قضبان مجهولة القوى ، فإذا كان العدد المقطوع أكثر من ذلك فيجب أن يكون عدد القضبان الزائد عن ثلاثة – وهو عدد المعادلات – معروف القوى مسبقاً بأى طريقة أخرى .

ويلاحظ أننا افترضنا القضبان فى حالة شد (هذا الغرض يسهل دائماً الحل) فإذا وجدت النتيجة موجبة فهذا يعنى أن الفرض سليم وإلا فيعكس السهم .

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A(\overline{AB}) - F_{EF}(\overline{EB}) = 0$$

$$\because F_{EF} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} V_A = V_A \tan \alpha$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A - P_1 - F_{BF} \sin \alpha = 0$$

$$\therefore F_{BF} = \frac{1}{\sin \alpha} (V_A - P_1)$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{BC} + F_{BF} \cos \alpha + F_{EF} = 0$$

$$\therefore F_{BC} = \frac{1}{\sin \alpha} (P_1 - V_A \cos \alpha) - V_A \tan \alpha$$

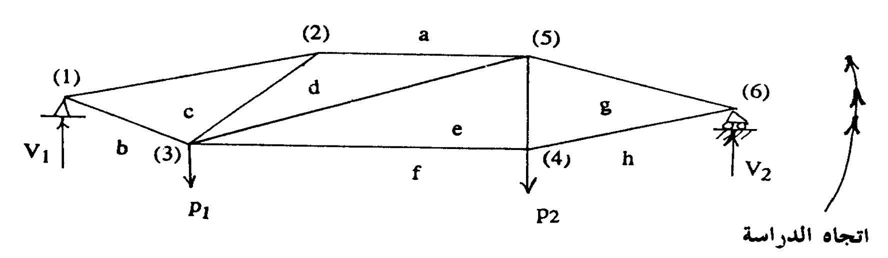
$$= P_1 \cos \alpha - V_A \left(\frac{1}{\cos \sin \alpha}\right)$$

وهكذا يمكننا أن نجد القوى فى جميع القضبان بعمل القطاعات المناسبة .

7.43 طريقة بيانية :

الطريقـة البيانيـة تطبـق للجمالونـات المحددة إستاتيكيـاً داخليـاً وخارجيـاً ، وكالعـادة فإننـا نبـدأ بإيجاد ردود الأفعـال ، ويمكـن إيجادهـا حسابيـاً أو بيانيـاً كما تقـدم فى الـفصلين الثالث والرابع .

نشرع بعد ذلك فى تقسيم المناطق وتسميتها ، والمنطقة هى مساحة تحدد بواسطة خط عمل قوى (أو امتداده) أو بقضيب أو برد فعل ، وذلك كما يتضح بالشكل 7.14 .



شكل 7,14 الطريقة البيانية وتقسيم المناطق

تتلخص الطريقة فى دراسة اتزان كل مفصلة على حدة ، وذلك برسم مضلع القوى التى تؤثر على تلك المفصلة على أن تكون الدراسة فى اتجاه مضاد لعقارب الساعة حول كل مفصلة . ولندرس على سبيل المثال المفصلة (١) ، فيكون اتجاه الدراسة هو : $\overrightarrow{acba}$

من a إلى b : نرسم رد الفعل V_1 .

من b إلى c : نرسم اتجاها موازيا للقضيب (1) — (3)

من c إلى a : نرسم اتجاه موازى للقضيب (1) — (2)

الشكل 7.15 يوضح مضلع القوى للمفصلة (1) .

b

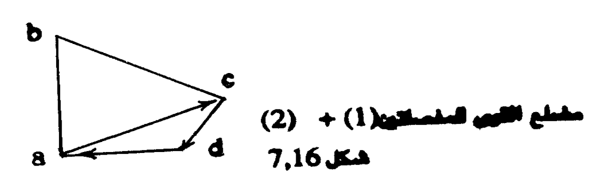
c

a

شكل 7,15

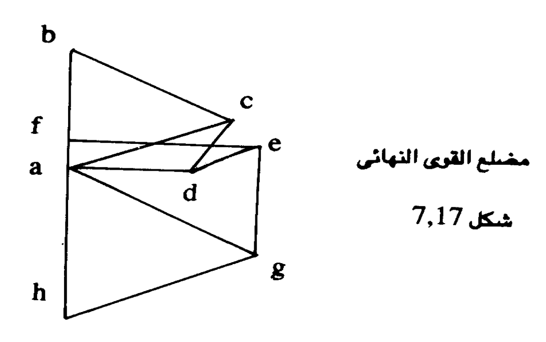
ومنه يتضح أن النقطة C حددت بواسطة تقاطع الموازى للقضيب (1) — (3) مع الموازى للقضيب (1) — (2) .

المضلع يوضح اتجاه كل قوة وكذلك قيمتها حيث يمكن قياسها مباشرة (يجب أخذ مقياس الرسم فى الاعتبار) ، وحيث أننا عرفنا اتجاه كل قوة فإننا بعد ذلك — ولمعرفة نوع القوة شد أم ضغط — ندرس مرة أخرى المفصلة فى اتجاه مضاد لعقارب الساعة فنلاحظ أن القوة $\overrightarrow{bc}$ تشد المفصلة (1) ومن ثم فالقضيب (1) — (3) مشدود وبالمقابل $\overrightarrow{ac}$ يضغط المفصلة (1) فيكون القضيب (1) - (2) مضغوطاً . والمعلوم أن مضلع القوى لكل مفصلة يجب أن يكون مقفلاً، وذلك لأن المفصلات فى حالة اتزان ، وللحصول على هذا المضلع المقفل لكل مفصلة فلابد أن يكون هناك قضيبان مجهولان على الأكثر كما هو الحال بشأن المفصلة التى درسناها (1) - (2) , (1) - (3) هما القضيبين المجهولين . المفصلات الأخرى يمكن دراستها بنفس الطريقة ، وتستكمل على نفس مضلع القوى للمفصلة (1) نحصل على مضلع قوى واحد لكل الجمالون ، وهو الموضح بشكل 7.17 فى حين يوضح الشكل 7.16 مضلع القوى للمفصلتين (1) + (2) وهو مضلع قوى مرحلى .



مضلع القوى للمفصلتين (1) + (2)

شكل 7,16



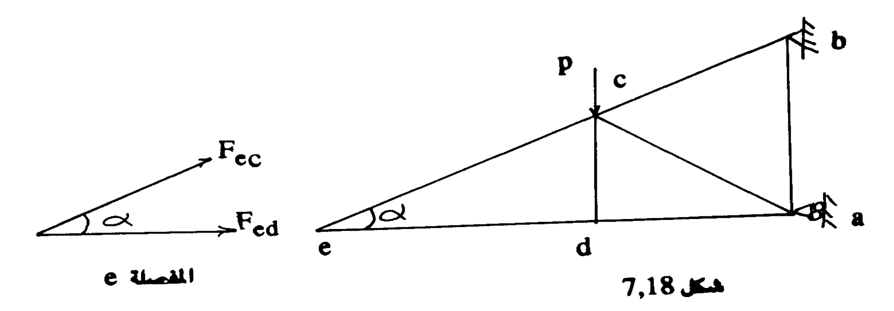
مضلع القوى النهائى

شكل 7,17

المفصلة	المناطق	القوى	الأتجاه	قيمة القوة ونوعها
1	$\overline{abca}$	ab رد فعل 3-1//bc 2-1//ca	تشد 1 تضغط1	(+ ....) شد (– ......) ضغط
2	$\overline{acda}$	1-2 // ac 3 - 2 // cd 5 - 2 // da	تشد 2 تضغط 2	(+ ....) شد (– ......) ضغط
3	$\overline{dcbfed}$	2 - 3// dc 1 - 3 // cb p_1 = bf 4 - 3 // fe 5 - 3 // ed	تشد 3 تضغط 3	(+ ....) شد (– ......) ضغط
4	$\overline{efhge}$	3 - 4 // fh 6 - 4 // hg 5 - 4 // ge	تشد 4 تضغط 4	(+ ....) شد (– ......) ضغط
5	$\overline{adega}$	2 - 5 // ad 3 - 5 // de 4 - 5 // eg 6 - 5 // ge	تضغط 5	(– ......) ضغط

7.5 القضبان ذات القوى صفر :

لندرس المفصلة e بالجمالون شكل 7.18 .



شكل 7,18

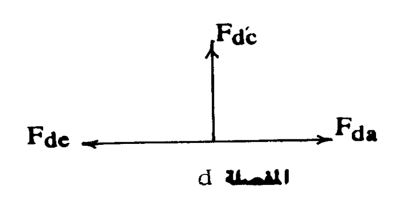
$$\Sigma y = 0 \rightarrow F_{ec} \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow = 0$$

$$\Sigma x = 0 \rightarrow F_{ed} + F_{ec} \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow F_{ed} = 0$$

وبدراسة المفصلة d نجد :

$$\Sigma y = 0 \rightarrow F_{dc} = 0$$

$$\Sigma x = 0 \rightarrow F_{da} = F_{de}$$



المفصلة d

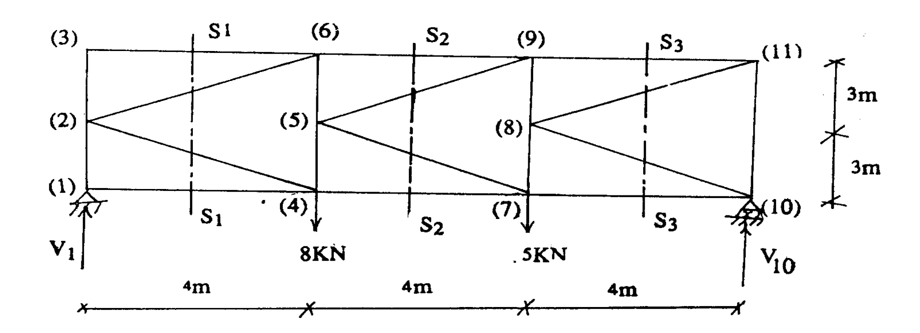
ويمكننا من تلك الدراسة استخلاص القاعدتين التاليتين :

١ – إذا تقاطع قضيبان فى مفصلة ما (مثل المفصلة e) وفى غياب قوى خارجية ، تكون القوى الداخلية بهذين القضيبين صفراً .

٢ – إذا كان هناك ثلاثة قضبان تتقاطع بمفصلة واحدة مثل d ، اثنان منهما لهما نفس خط العمل وفى غياب قوى خارجية ، فإن القوى بهذين القضيبين تكون متساوية والقضيب الثالث يكون ذو قوة صفر .

7.6 تطبيقـــــات :

١ – أوجد القوى الداخلية بقضبان الجمالون بالشكل التالى :



الحـــــل :

الجمالون أعلاه يسمى الجمالون K

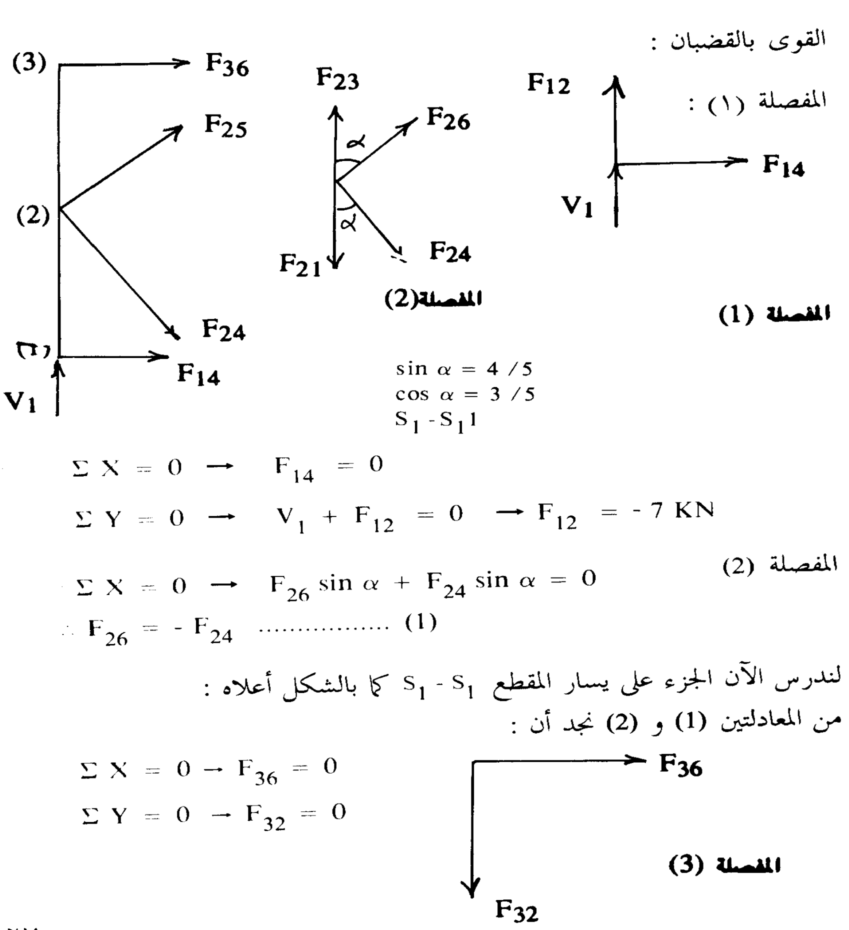
ردود الأفعال :

$$\Sigma M_{10} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{8 \times 8 + 5 \times 4}{12} = 7 \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow V_{10} = \frac{8 \times 4 + 5 \times 8}{12} = 6 \text{ KN} \uparrow$$

القوى بالقضبان :

المفصلة (١) :



$\sin \alpha = 4/5$

$\cos \alpha = 3/5$

$S_1 - S_1$

$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{14} = 0$

$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_1 + F_{12} = 0 \rightarrow F_{12} = -7$ KN

المفصلة (2)

$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{26} \sin \alpha + F_{24} \sin \alpha = 0$

$\therefore F_{26} = -F_{24}$ .... (1)

لندرس الآن الجزء على يسار المقطع $S_1 - S_1$ كما بالشكل أعلاه :

من المعادلتين (1) و (2) نجد أن :

$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{36} = 0$

$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{32} = 0$

ويمكننا أن نستمر بنفس الأسلوب لإيجاد القوى الداخلية حيث يمكن إيجاد جميع القوى بالقضبان السفلى والعليا ، وكذلك الرأسية عن طريق دراسة المفصلات .

أما القضبان المائلة فيمكننا إيجاد القوى بها بواسطة المقاطع $S_3 - S_3$ ، $S_2 - S_2$ ، $S_1 - S_1$ وذلك مثلما فعلنا فى F_{24} ، F_{26} .

المفصلة (4) :

$5.83 = F_{42}$

$0 = F_{41}$

α F_{45} F_{47} 8KN

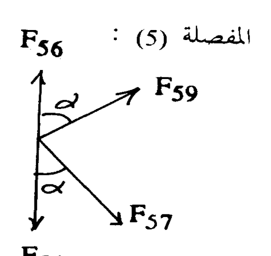
$$\Sigma X = 0 \rightarrow \quad F_{47} - F_{42} \sin \alpha = 0$$

$$\therefore F_{47} = 5.83 \left(\frac{4}{5} \right) = 4.67 \text{ KN}$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad F_{45} + F_{42} \cos \alpha - 8 = 0$$

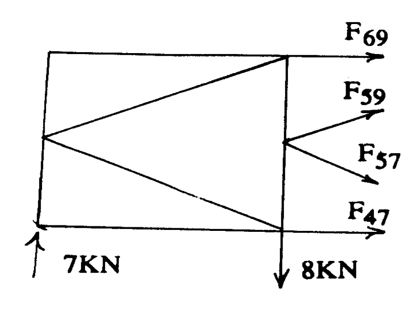
$$\therefore F_{45} = -5.83 \left(\frac{3}{5} \right) + 8 = 4.5 \text{ KN}$$

المفصلة (5) :



$$\Sigma X = 0 \rightarrow \quad F_{57} = -F_{59} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

المقطع $S_2 - S_2$ (الجزء الأيسر) :



$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad 7 - 8 + F_{59} \cos\alpha - F_{57} \cos\alpha = 0$

$\therefore -1 + F_{59} (\frac{3}{5}) - F_{57} (\frac{3}{5}) = 0$ .... (4)

من المعادلتين (3) و (4) أعلاه نجد أن :

$F_{59} = 0.83$ KN , $F_{57} = -0.83$ KN

المفصلة (6) :

$0 = F_{63}$, F_{69} , $-0.83 = F_{62}$, F_{65} , α

$\Sigma X = 0 \rightarrow$

$F_{69} - F_{63} - F_{62} \sin\alpha = 0$

$\therefore F_{69} = -5.83 (\frac{4}{5}) = -4.67$ KN

المفصلة (١)

$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad F_{65} + F_{62} \cos\alpha = 0$

$\therefore F_{65} = 5.83 (\frac{3}{5}) = 3.5$ KN

تحقيق لما سبق :

بما أن المفصلة (5) يجب كذلك أن تكون متزنة فى الاتجاه الأفقى وكذلك الرأسى :

$\Sigma X = 3.5 - 4.5 + 0.83 (\frac{3}{5}) - (-0.83) (\frac{3}{5}) = 0$

$\Sigma X = 0 \rightarrow$

المفصلة (7) :

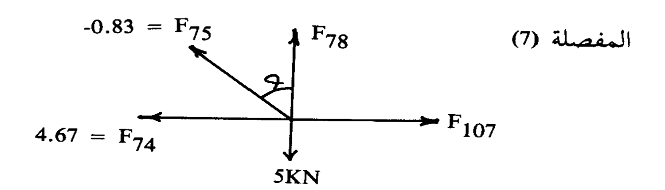
$F_{107} - F_{74} - F_{75} \sin\alpha = 0$

$\because F_{107} = 4.67 - 0.83 (\frac{4}{5}) = 4$ KN

$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad F_{78} - 5 + F_{75} \cos\alpha = 0$

$\therefore F_{78} = 5 - (-0.83) (\frac{3}{5}) = 5.5$ KN

المفصلة (7)



المفصلة (8) :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{8\,11} = -F_{8\,10} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

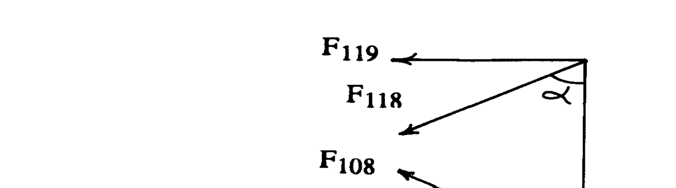
F89
F811
F8 10
F87 = 5,5 KN

المقطع S_3 - S_3 (الجزء الأيمن) :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 6 + F_{108} \cos\alpha - F_{118} \cos\alpha = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

من المعادلتين (5) , (6) نجد :

$$F_{8\,10} = -5 \text{ KN}, \quad F_{811} = 5 \text{ KN}$$



$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{911} - F_{96} - F_{95} \sin \alpha = 0$$

4,67 - F96 F911 α 0,83 = F95 F98

$$F_{911} = -(-4{,}67) - 0.83\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{98} + F_{95} \cos \alpha = 0$$

$$F_{98} + 0.83\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \rightarrow F_{98} = -0.5 \text{ KN}$$

المفصلة (9) :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{10\,11} + F_{10\,8} \cos \alpha = 0$$

5 = F10 8 F10 11 α 4 = F10 7 6 KN

$$F_{10\,11} + 6 + (-5)\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\therefore F_{10\,11} = -3 \text{ KN}$$

المفصلة (10) :

تحقيق صحة النتائج :

بدراسة المفصلة (11) نجد :

$$\Sigma X = F_{119} + F_{118} \sin \alpha$$

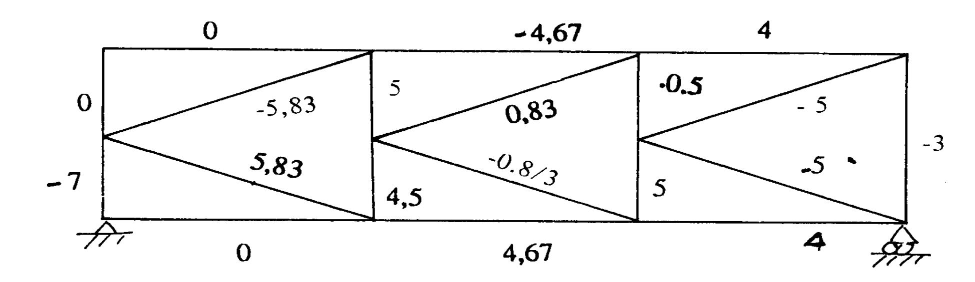
$$= -4 + 5 \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\Sigma Y = F_{11\,10} + F_{11\,8} \cos \alpha$$

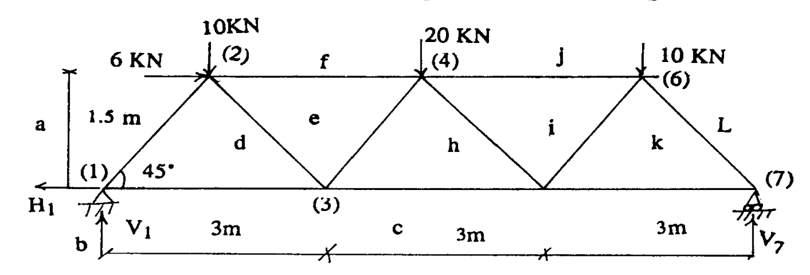
$$= -3 + 5 \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

وهو المطلوب لتحقيق الأتزان .

النتائج السابقة مسجلة على الجمالون أسفله باعتبار أن – = ضغط ، + = شد .



2 - للجمالون (وارين) بالشكل التالى والمعرض للأحمال المبينة ، أوجد بطريقة بيانية القوى بجميع القضبان ، حقق النتائج تحليلياً للقضبان 12 , 24 , 34 , 35 , 57 .



الحـــل :

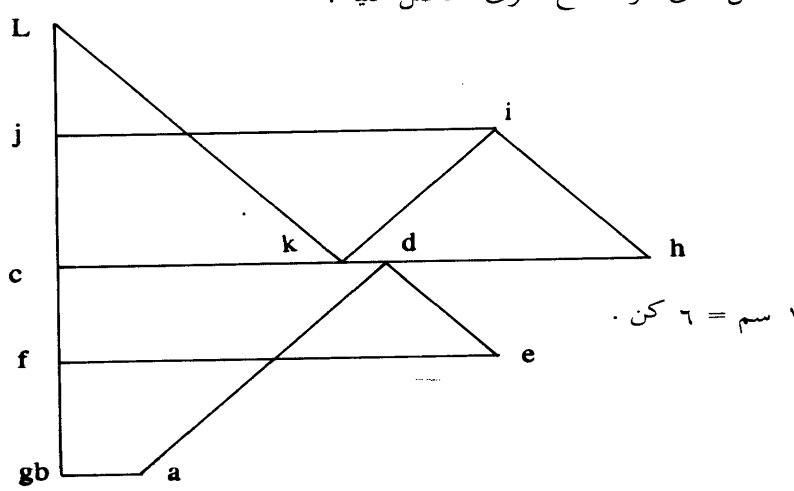
ردود الأفعال :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_1 = 6\ KN \leftarrow$$

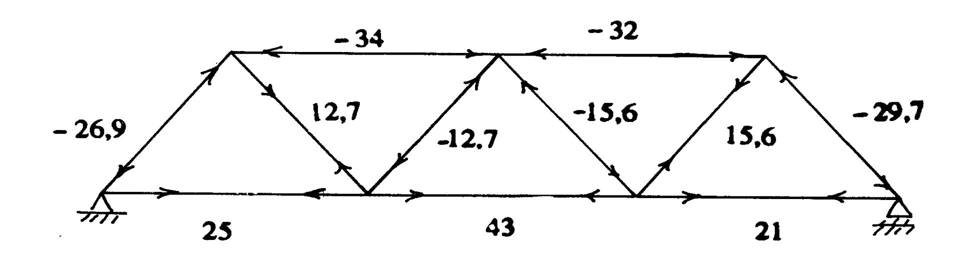
$$\Sigma M_7 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{10 \times 7.5 + 20 \times 4.5 + 10 \times 1.5 - 6 \times 1.5}{9} = 19\ KN \uparrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow V_7 = \frac{10 \times 7.5 + 20 \times 4.5 + 10 \times 1.5 + 6 \times 1.5}{9} = 21\ KN \uparrow$$

يلاحظ بالجمالون أننا قسمنا المناطق كما سبق أن بيناه فى شرح هذه الطريقة البيانية ، وسوف ندرس كل مفصلة فى الاتجاه المضاد لعقارب الساعة ، وذلك بترتيب الترقيم حيث راعينا فيه أن يكون لكل مفصلة عند دراستها قضيبين مجهولين فقط . الشكل التالى هو مضلع القوى الحاصل عليه :



١ سم = ٦ كن .



تحقيق للقضبان 12 , 24 , 34 , 35 , 57 .

المفصلة (١) :

6 KN
F_{12}
$\alpha = 45°$
F_{13}
19 KN

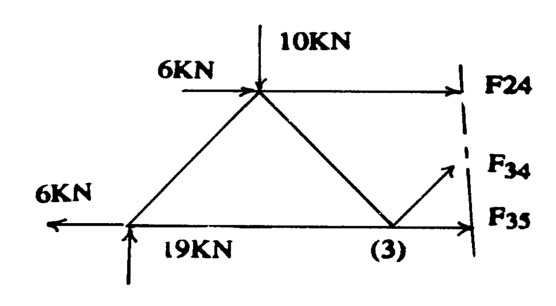
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 19 + F_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$F_{12} = -19\sqrt{2}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{13} - 6 + F_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$F_{13} = 25$$

القطاع $S_1 - S_1$ وهو يمر بالقضبان 24 , 34 , 35 .



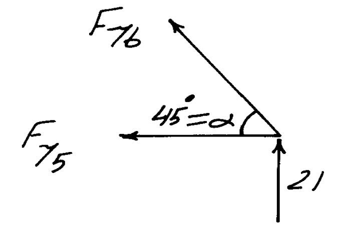
$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{24} + F_{35} + F_{34} \frac{1}{\sqrt{2}} + 6 - 6 = 0$$

$$F_{35} = \frac{9}{\sqrt{2}} \sqrt{2} + 34 = 43 \text{ KN}$$

$$F_{76} = 21 \sqrt{2} = -29.7 \text{ KN}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{75} + \frac{F_{75}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow F_{75} = 21 \text{ KN}$$

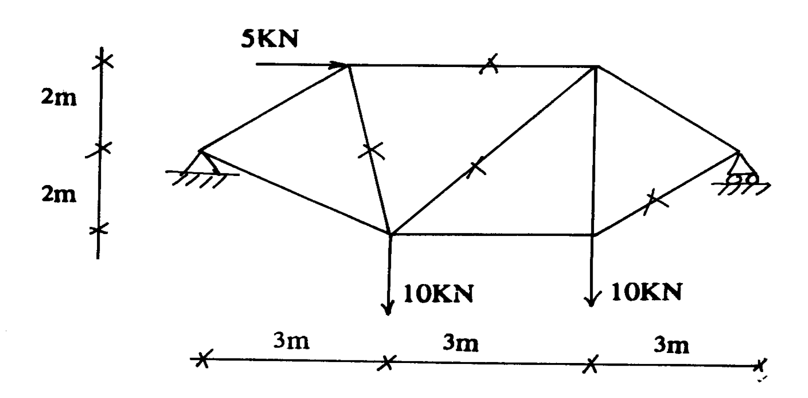
المفصلة (7) :

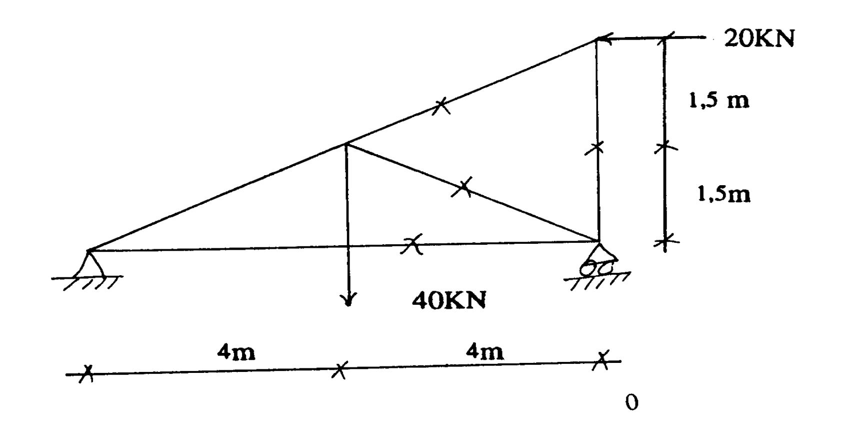


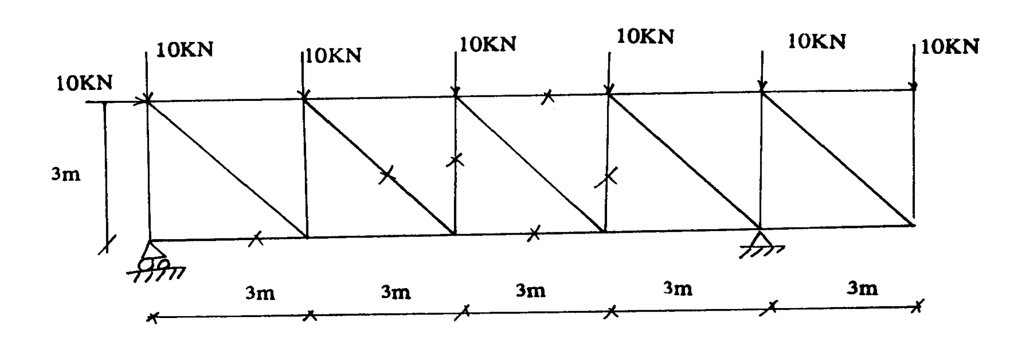
وواضح أن النتائج تحقق الحل البيانى .

7.7 تمــــارين :

أوجد القوى بقضبان الجمالونات التالية بطريقة بيانية ثم حقق الحسابات للقضبان ذات العلامة X بطريقة حسابية :




20KN
1,5 m
1,5m
40KN
4m
4m
0


10KN
10KN
10KN
10KN
10KN
10KN
10KN
3m
3m
3m
3m
3m
3m

الباب الثامن

مركـــز الثقل

لتكن مجموعة من النقط المادية والتى أوزانها معرفة كما يلى :

$$\vec{G}_1 = m_1 \vec{g} \ , \ldots\ldots , \vec{G}_2 = m_2 \vec{g} \ , \ldots\ldots , \vec{G}_i = m_i \vec{g} \ , \ldots\ldots , \vec{G}_n = m_n \vec{g} \qquad (8.1)$$

حيث g هى عجلة الجاذبية الأرضية وقيمتها $9.8 \ m/sec^2$.

أما $m_1 , m_2 , \ldots , m_i , \ldots , m_n$ فهى كتل تلك النقط المادية .

لو افترضنا الآن أن مجال الجاذبية الأرضية منتظم ، فتكون الأوزان بالمعادلة (8.1) أعلاه عبارة عن متجهات قوى رأسية ومتوازية ، مركز تأثير محصلة هذه القوى c ويكون C فى هذه الحالة هو مركز القوى المتوازية $\vec{G}_1$ ، $\vec{G}_2$ ، .... ، $\vec{G}_i$ ، .... ، $\vec{G}_n$ ويعرف بمركز ثقل تلك النقط المادية ، ويمكن تعيينه بتطبيق المعادلات (2.23) , (2.24) فنجد :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i}{\Sigma G_i} \qquad \ldots\ldots (8.2)$$

وإحداثيات C والتى تعتبر مركبات المتجه $\vec{r}_c$ تكـون :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i x_i}{\Sigma G_i} \ , \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i y_i}{\Sigma G_i}$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i z_i}{\Sigma G_i} \qquad \ldots\ldots (8.3)$$

عن طريق المعادلات (8.3) يمكن تعيين مركز ثقل أى جسم .

ومن الواضح أن مركز ثقل جسم ما هو النقطة التى يمكن أن نركز بها وزنه .

8.1 مركـز الكتلة :

لو افترضنا مرة أخرى أن تغيرات عجلة الجاذبية g عند سطح الأرض يمكن أهمالها ، فإننا فى هذه الحالة نستطيع أن نكتب المعادلة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad g = g \sum_{i=1}^{n} m_i$$

بالتعويض عن G_i فى المعادلة (8.2) نحصل على :

$$\vec{r_c} = \frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{g \sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \text{................ (8.4)}$$

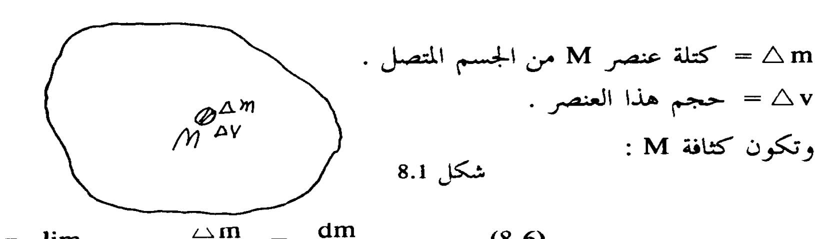
النقطة C تعرف فى هذه الحالة بمركز الكتلة للمجموعة التى يراد دراستها وإحداثياتها تكون :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{y_i}}{g \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{z_i}}{g \sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \text{................ (8.5)}$$

8.2 - مركز الكتلة لجسم مادى متصل :

بالنسبة للأجسام المادية التى تحتل جزء من الفراغ (أى التى لها حجم) ، فإننا نعرف الكثافة الحجمية لها كما يلى (شكل 8.1) :



Δm = كتلة عنصر M من الجسم المتصل .

Δv = حجم هذا العنصر .

وتكون كثافة M :

شكل 8.1

$$P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dV} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.6)$$

حيث P = الكثافة الحجميـــة .

أما إذا كان الجسم يحتل مساحة فقط (وليس حجماً) فإننا نعرف الكثافة السطحية (S) :

$$S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.7)$$

أما إذا كانت الأوزان المادية لا تحتمل مساحة فتصبح على شكل خط أومنحنى فإننا نعرف الكثافة الطولية كما يلى :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l d l} = \frac{dm}{} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.6)$$

وعندما تكون الكثافة ثابتة يقال إن الجسم له كثافة منتظمة أو أنه متجانس .

لتغيير العلاقات (8.4) , (8.5) من علاقات مركز كتلة نقط مادية أو جزيئات إلى علاقات لجسم ما متصل نستبدل علامة التكامل بعلامة Σ ، ونستعين بالمعادلات (8.6) , (8.7) , (8.8) لنجد :

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{r}_c = \dfrac{\int p \, \vec{r} \, dV}{\int p \, dV} & \text{للحجــوم} \\ \vec{r}_c = \dfrac{\int s \, \vec{r} \, dA}{\int s \, dA} & \text{للمساحـات} \\ \vec{r}_c = \dfrac{\int \lambda \, r \, dL}{\int \lambda \, dL} & \text{للأطوال} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.9)$$

8.3 المركز الهندسى :

فى حالة ما إذا كان الجسم متجانس فتكون الكثافة ثابتة ، وتصبح العلاقات أعلاه :

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r}\, dV}{\int dV} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r}\, dA}{\int dA} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r}\, dl}{\int dl} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.10)$$

وهذه هى متجهات مواضع المركز الهندسى لأى شكل .

8.4 أمثلة محلولة :

١ – لتكن الأربع جزيئات على رؤوس المربع ذو الضلع a . المطلوب إيجاد مركز كتلة هذه الجزيئات .

$$m_1 = m \quad , \quad m_2 = 4\,m \quad , \quad m_3 = 3\,m \quad , \quad m_4 = 2\,m$$

الحـــــل :

بتطبيق المعادلات (8.5) مع العلم أن هذه المسألة فى المستوى نجد :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i\ x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

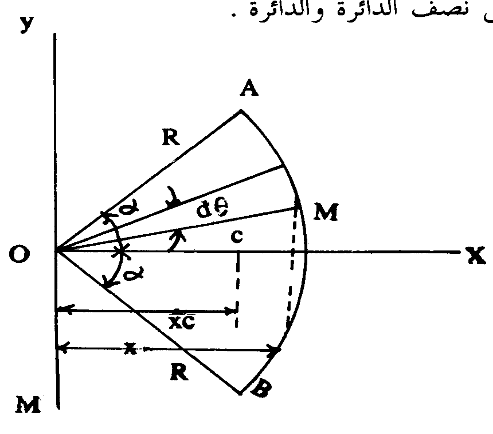
$$= \frac{m \cdot o + 4m \cdot a + 3m \cdot a + 2m \cdot o}{m + 4m + 3m + 2m} = \frac{7}{10}\ a$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i\ y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{m \cdot o + 4m \cdot a + 3m \cdot a + 2m \cdot o}{m + 4m + 3m + 2m} = \frac{a}{2}$$

وبالتالى تكون إحداثيات مركز الكتل الأربع C : $\left(\frac{7}{10}\ a\ ,\ \frac{a}{2} \right)$

٢ – أوجد مركز كتلة قوس دائرى متجانس بالشكل التالى :
ادرس حالتى نصف الدائرة والدائرة .



الحـــل :

القوس متماثل بالنسبة للمحور OX ، وبالتالى فإن مركزه لابد وأن يقع على المحور الأفقى OX فالمطلوب إذاً هو الإحداثى الأفقى فقط أى X_c .

بفر: أن نصف قطر القوس هو R ، وأن زاويته الكلية هى 2α كما بالشكل فإننا بتطبيق المعادلة (8.10) نحصل على :

$$X_c = \frac{\int X \, d\ell}{\int d\ell}$$

حيث إننا اعتبرنا أن dl هى المسافة على القوس MM .

$$\therefore d\ell = M'M = R \, d\Theta$$

$$X = R \cos \Theta$$

$$\therefore X_c = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \Theta \, d\Theta}{R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\Theta} = R \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \Theta \, d\Theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\Theta}$$

$$X_c = \frac{R \, [\sin \Theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\Theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.11)$$

حالة نصف الدائرة :

فى هذه الحالة يمكن أن نطبق المعادلة (8.11) على أساس أن :

$$2\alpha = \pi \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومن ثم فإننا نحصل على :

$$X_C = R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.12)$$

حالة قوس دائرى كامل :

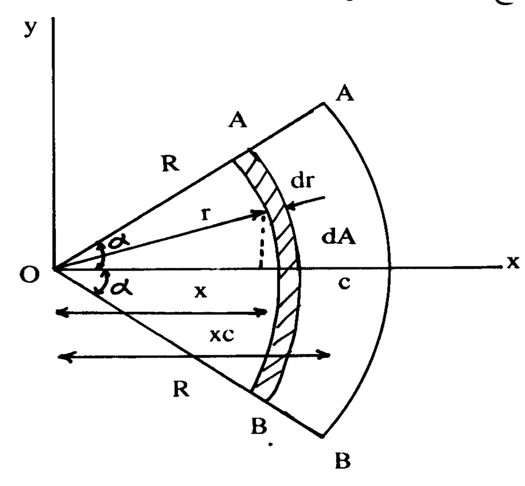
فى هذه الحالة يمكن أيضاً أن نطبق المعادلة (8.11) وذلك بالشروط التالية :

$$2\alpha = 2\pi \longrightarrow \alpha = \pi$$

$$X_C = R \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$$

وهذا بالطبع يفيد أن مركز الدائرة سوف ينطبق على نقطة الأصل .

٣ – أوجد المركز الهندسى لقطعة دائرية متجانسة بالشكل التالى :
ادرس القطاع النصف الدائرى .



الحــــل :

نفترض أن القطعة الدائرية لها نصف قطر R وتحصر زاوية مقدارها 2α فى هذه الحالة العنصر المقترح هو على شكل قوس دائرى مساحته dA وهو المهشر بالشكل ، وهذه المساحة يمكن حسابها كما يلى :

$$dA = 2\alpha . r dr$$

ويمكن فى هذه الحالة تطبيق المعادلة الثانية من (8.10) نحصل على : (الوضع فى هذه الحالة هو مساحة) .

$$X_c = \frac{\int x\, d A}{\int d A}$$

بالنسبة للعنصر المهشر وهو قوس دائرى يمكن تطبيق المعادلة (8.11) الحاصل عليها فى المثال السابق نجد لهذا العنصر :

$$X = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

حيث r هى نصف قطر العنصر المهشر و x هى مركز كتلته .

وبالتعويض عن x من المعادلة أعلاه فى المعادلة (8.10) نجد :

$$X_c = \frac{2\, \alpha \sin \alpha \int_0^R r^2\, d r}{2\, \alpha \,.\, \alpha \int_0^R r\, d r} = \frac{\sin \alpha \int_0^R r^2\, r\, d r}{\int_0^R d r}$$

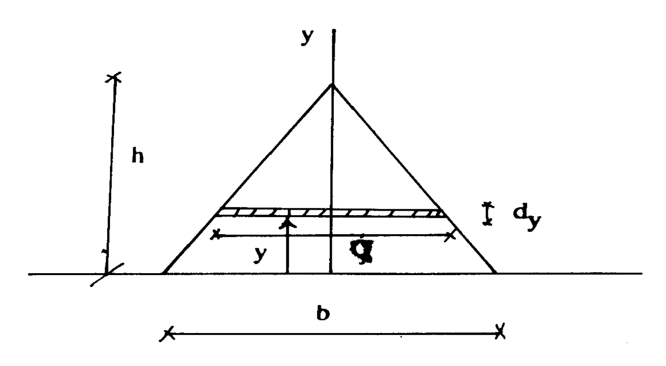
$$X_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R}{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R} = \frac{2 \sin \alpha}{3\, \alpha} R \text{ .... } (8.13)$$

يمكن الآن دراسة الحالة الخاصة عندما يكون القطاع على مشكلة نصف دائرة حيث يمكن التعويض عن قيمة الزاوية α :

$$2\, \alpha = \Pi \;\longrightarrow\; \alpha = \frac{\Pi}{2}$$

$$X_c = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{3\, \pi}{2}} R = \frac{4\, R}{3\, \pi}$$

٤ – المطلوب إيجاد مركز الشكل المثلثى المتساوى الساقين بالشكل التالى :



الحـــل :

لهذا المثلث نأخذ العنصر المهشر والذى مساحته (a.dy) وهو على بعد y من المحور الأفقى والمطلوب فى هذه المسألة هو إيجاد الإحداثى الرأسى لمركز الشكل حيث إن الإحداثى الأفقى يكون على المحور y نتيجة للتماثل .

لإيجاد y_c نطبق المعادلة الثانية فى (8.10) لنجد :

$$Y_c = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\int y.\,a\,dy}{\int a\,.\,dy}$$

وحيث إن a متغير بالنسبة للارتفاع فإننا يمكن من تشابه المثلثات إيجاد ما يلى :

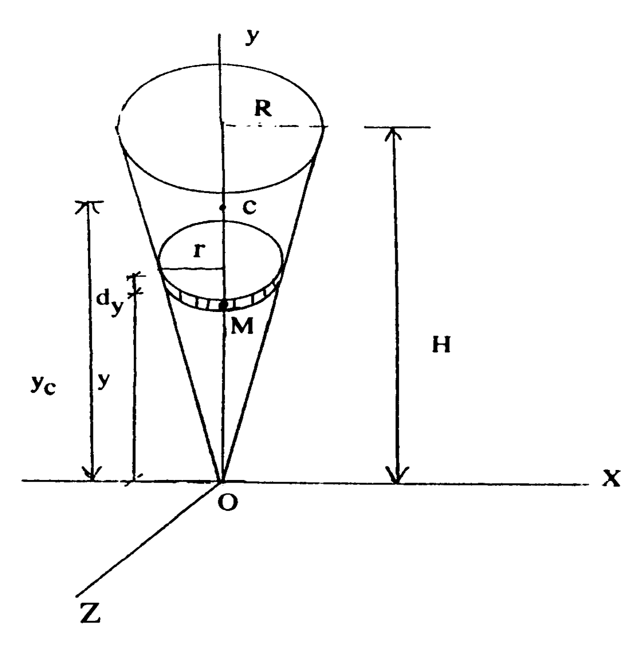
$$\frac{a}{b} = \frac{(h-y)}{h} \longrightarrow a = b\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

بالتعويض عن a فى التكامل أعلاه نجد :

$$Y_c = \frac{\int_0^h y\, b\,(1 - \frac{Y}{h})\, dy}{\int_0^h b\,(1 - \frac{Y}{H^2})\, dy} = \frac{\int_0^h (hy - Y^2)\, dy}{\int_0^h (h - Y\, dy} =$$

$$= \frac{[\frac{hY^2}{2} - \frac{y^3}{3}]_0^H}{[hy - \frac{y^2}{2}]_0^H} \qquad Y_c = \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}}{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$

5 – أوجد مركز الكتلة للمخروط القائم المتجانس ، والذى قاعدته دائرية بالشكل التالى :



الحـــــل :

كما بالشكل فإن المخروط ارتفاعه H ونصف قطر قاعدته هو R . فإذا أخذنا في هذه الحالة عنصر حجم dv وهو كما بالشكل شريحة دائرية نصف قطرها r وارتفاعها dy ، وهي توجد على ارتفاع y من نقطة الأصل o . ولو افترضنا أن C هو مركز كتلة المخروط وهو نتيجة للتماثل يكون واقعاً على المحور oy وبالتالى فإن إحداثييه فى اتجاه كل من ox و oz معروف . أما بالنسبة للمحور OY فيجب إيجاده وليكن y_c .

بتطبيق المعادلة الأولى فى (8.10) نجد:

$$Y_c = \frac{\int y d V}{\int d v}$$

حيث : $TT\, r^2 . dy = dv$

ومن التشابه نجد النسب التالية :

$$\frac{r}{R} = \frac{Y}{H} \longrightarrow r = R\,\frac{Y}{H}$$

$$\because dV = \Pi R^2 \frac{Y^2}{H^2}\, dy$$

وبالتعويض عن dv بالتكامل أعلاه نجد :

$$Y_c = \frac{\int_0^H y\, \Pi R^2 \frac{Y^2}{H^2}\, dy}{\int_0^H \Pi R^2 \frac{Y^2}{H^2}\, dy} =$$

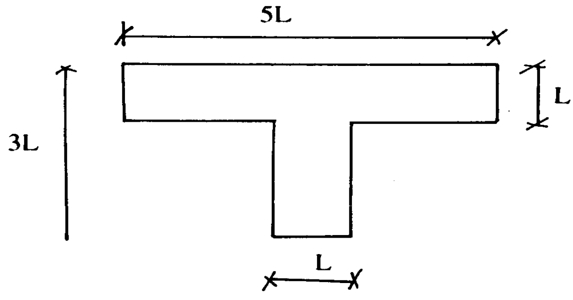
$$= \frac{\int_0^H Y^3\, dy}{\int_0^H Y^3\, dy} = \qquad = \frac{\left[\frac{Y^4}{4}\right]_0^H}{\left[\frac{y^2}{3}\right]_0^H} = \frac{3}{4} H$$

8.5 القطاعات الهندسية المركبة :

رأينا فى الفقرات السابقة كيفية حساب مركز كتلة (أو مركز ثقل) قطاعات هندسية بسيطة سواء كانت فى الفراغ أو المستوى أو كانت أطوال . ونتعرض فى هذه الفقرة للقطاعات المركبة ، ويقصد بها تلك القطاعات المكونة من اثنين أو أكثر من الأشكال الهندسية البسيطة .

ولنأخذ لذلك المثال التالى لتعيين مركز ثقل قطاع مركب :

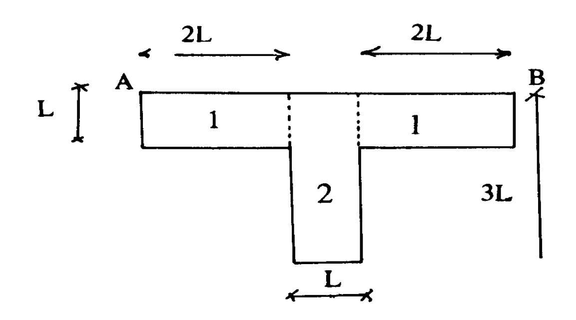
6 – أوجد مركز ثقل القطاع الهندسى على شكل حرف T بالشكل التالى ، حيث L وحدة طول



الحـــل :

يتضح من الشكل أن القطاع T يتكون من مستطيلين أحدهما أفقى ، والآخر رأسى وهو أيضاً متماثل بالنسبة لمحور رأسى يمر بمنتصفه ، وبالتالى فإن المطلوب فقط هو الموضع الرأسى لمركز الثقل .

بتقسيم الشكل إلى مستطيلين (1) , (2) كما هو موضح يمكن عمل حسابات مركز الثقل بالجدول التالى :



	b	h	(b.h)	d	d(b.h)
1	2 L x 2	L	$4L^2$		$2L^3$
2	L		$3L^2$	3L / 2	$9L^3/2$
			$7L^2$		$13L^3/2$

حيث : b : عرض المستطيل المعنى أو البعد الموازى للمحور الأفقى .

h : أرتفاع المستطيل المعنى أو البعد الموازى للمحور الرأسى .

d : المسافة بين مركز ثقل العنصر المعنى والشريحة العليا للشكل أى AB .

وبالتالى تكون مساحة الشكل الكلية هى : (b.h) وهذا هو مقام المعادلة (8.10) . أما الخانة الرأسية الأخيرة فهى تمثل عزم هذه المساحة بالنسبة للشريحة العليا ، وبالتالى فهذه الكمية هى بسط المعادلة (8.10) ، ولذلك فإننا نجد مركز الثقل للشكل كله :

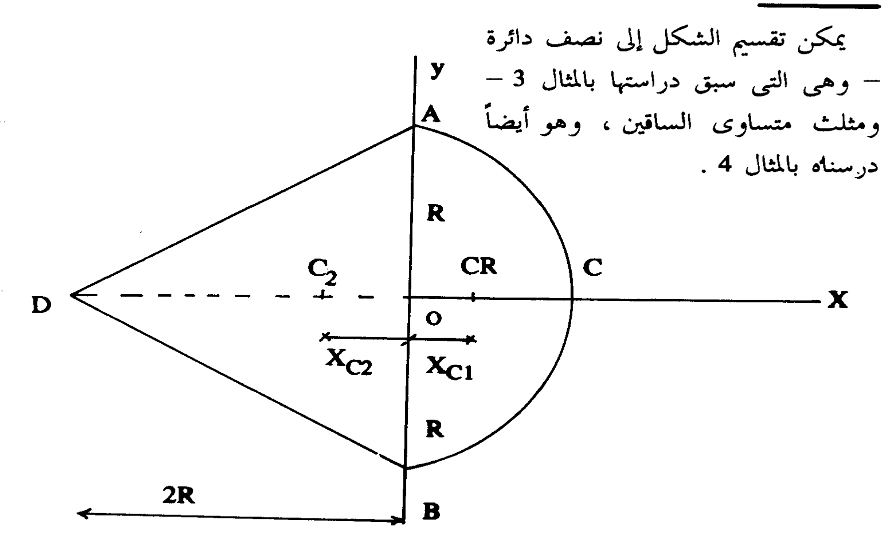
$$\nu = \frac{\Sigma d\,(b.h)}{\Sigma\, b\, h} = \frac{13 L^3 / 2}{7 \quad L^2} = \frac{13\, l}{14}$$

حيث ν : المسافة بين مركز ثقل الشكل والشريحة العليا .

٧ – أوجد مركز ثقل المساحة المحددة بنصف الدائرة ACB التى نصف قطرها R وبالخطين AD و DB المساويين هذا علماً بأن CD = 3R .

الحـــــل :

يمكن تقسيم الشكل إلى نصف دائرة – وهى التى سبق دراستها بالمثال 3 – ومثلث متساوى الساقين ، وهو أيضاً درسناه بالمثال 4 .



فمن المثال 3 نجد أن مركز ثقل نصف الدائرة هو (X_{c1}) :

$$X_{c1} = \frac{4}{3\pi}(1\,R) = 0.424\,R$$

أما من المثال 4 فإننا نجد أن مركز ثقل المثلث المتساوى الساقين (X_{c2}) هو :

$$X_{c_2} = \frac{(2\,R)}{3} = 0.667\,R$$

والآن بعد أن وجدنا مركز ثقل كل من نصف الدائرة C_1 والمثلث المتساوى الساقين C_2 فإنه يمكننا بتطبيق المعادلة (8.10) إيجاد مركز ثقل الشكل كله :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i X_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi R^2 (x_{c_1}) + \frac{1}{2} 2R\,2R(-x_{c_2})}{[\frac{1}{2}\pi R + \frac{1}{2} 2R(2R)]}$$

نلفت نظر القارىء أن X_{c1} سالبة ومن ثم فهى تعطى نتيجة سالبة .

$$X_c = \frac{-0.668\ R^3}{3.571\ R^2} = -0.187\ R$$

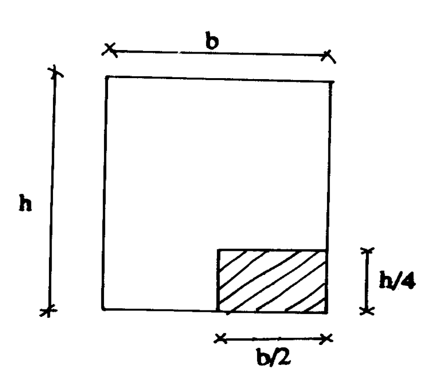
8.6 القطاعات المفرغة :

وهى تلك الأشكال الهندسية التى أستقطع منها جزء لسبب أو لآخر . وفى هذه الحالة لحساب مركز ثقلها نعتبر أن الجزء المستقطع مساحة سالبة وعزمه دائماً سالب كذلك ، وبالتالى نعوض عن تلك القيم السالبة فى المعادلة (8.10) وذلك يوضحه المثال التالى :

٨ — مستطيل (b.h) استقطع منه مستطيل مساحته ($\frac{h}{4}$. $\frac{b}{2}$) كما هو موضح بالشكل التالى . المطلوب إيجاد مركز ثقله .

الحـــــل :

القطعة المستقطعه من المستطيل هى المهشرة بالشكل ، ويمكن كما أسلفنا اعتبارها سالبة المساحة والعزم حول الشريحة العليا أو أى عزم وهذا ما فعلناه فى الجدول التالى على أساس أن العنصر رقم (1) هو المستطيل الكامل ، والعنصر رقم (2) هو العنصر المهشر وهو سالب القيمة .



	b	h	b . h	d	d(bh)	d`	d`(bh)
1	b	h	bh	h /2	$bh^2/2$	h /2	$bh^2/2$
2	b / 2	h / 4	bh / 8	7h /8	$7bh^2/64$	36 /4	$3b^2h/32$
Σ			7bh /8		$25bh^2/64$		$13b^2h/32$

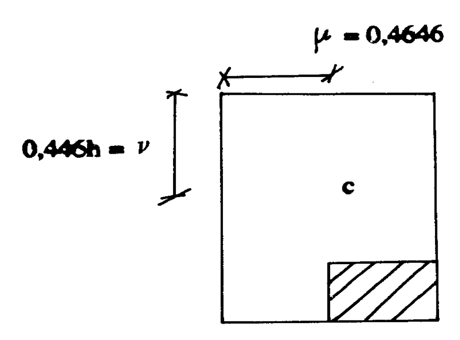
بالإضافة إلى الرموز المعرفة بالمثال 6 فإننا نجد فى هذا الجدول :

d` = المسافة بين مركز ثقل العنصر والشريحة الرأسية اليسرى للشكل .

$$\nu = \frac{22bh^2 / 64}{7\ bh / 8} = \frac{25\ h}{56} = 0.446\ h$$

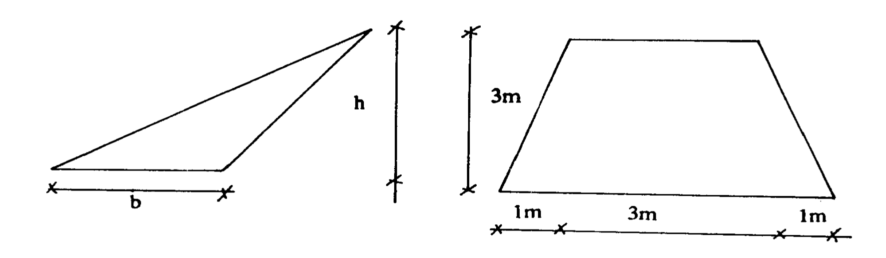
$$\mu = \frac{22bh^2 / 32}{7\ bh / 8} = \frac{13\ b}{28} = 0.446\ b$$

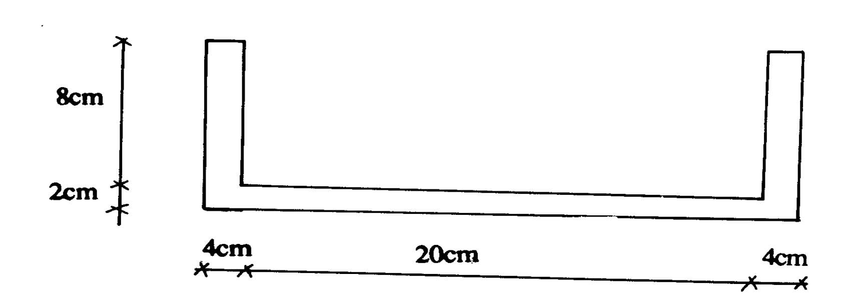
حيث μ هى بعد مركز ثقل الشكل الناتج بعد الاستقطاع عن الشريحة اليسرى الرأسية .



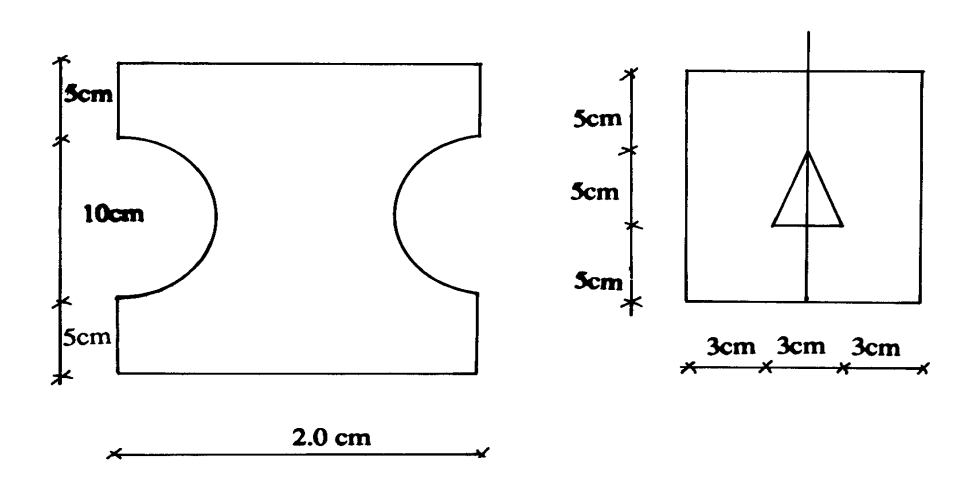
8.7 – تمـــارين :

1 – أوجد مراكز ثقل الأشكال الهندسية التالية :

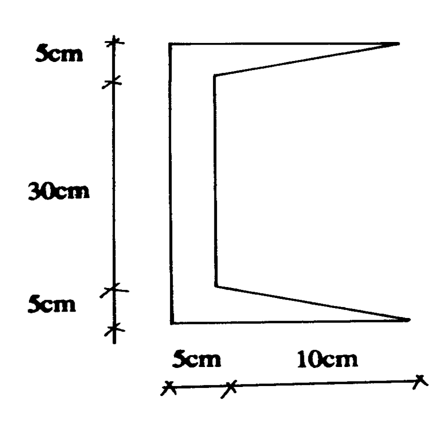




2 – أوجد مركز ثقل الأشكال المفرغة التالية :



3 – أوجد مركز ثقل الشكل التالى :



الباب التاسع

عزم القصور الذاتى

9.1 أنواع عزم القصور الذاتى :

تعريف : يعرف عزم القصور الذاتى – ويعرف أحياناً بالعطالة – لمجموعة من النقاط المادية بالنسبة لمستوى أو محور أو نقطة على أنه حاصل ضرب كتل تلك النقاط المادية فى مربع المسافة بينها وبين المستوى أو المحور أو النقطة المراد حساب عزم القصور حولها .

ويمكننا أن نكتب صورته العامة كما يلى :

$$I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots\ldots + m_i d_i^2 + \ldots + m_n d_n^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9.1)$$

حيث m_i هى كتلة النقطة المادية i ،

و d_i هى البعد بين النقطة المادية i والمستوى أو المحور أو النقطة المراد حساب عزم القصور الذاتى حولها .

ولندرس ذلك بشىء من التفصيل ، فدعنا نعتبر مجموعة النقاط المادية :

$$A_1 \; , \; A_2 \; , \ldots\ldots , A_i \; , \; \ldots \; , \; A_n$$

والتى كتلها على التوالى : $m_1 , m_2 , \ldots , m_i , \ldots\ldots , m_n$

وليكن متجه الموضع لها بالنسبة لنقطة الأصل o كما بالشكل 9,1 هو :

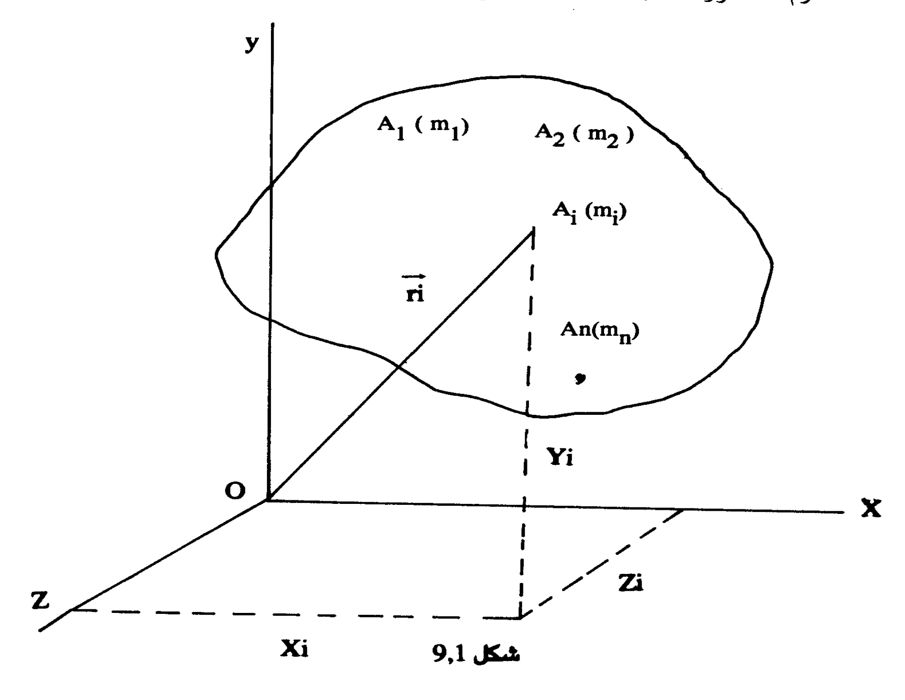
$$\overrightarrow{r_1} \ , \ \overrightarrow{r_2} \ , \ \ldots\ldots \ , \ \overrightarrow{r_i} \ , \ldots. \ , \ \overrightarrow{r_n}$$

وتكون مركبات متجه الموضع $\overrightarrow{r_i}$ كما هو معروف من دراستنا السابقة :

$$\overrightarrow{r_i} = X_i \ \overrightarrow{i} + y_i \ \overrightarrow{j} + z_i \ \overrightarrow{k}$$

وبالتالى فإننا يمكننا أن نكتب المعادلات التالية بالنسبة لمختلف عزوم القصور الذاتى ، وذلك تبعاً للتعريف المبين أعلاه :

١ – عزم القصور الذاتى بالنسبة للمستويات :



شكل 9,1

$$\left.\begin{array}{l} I(xoy) = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \\ I(yoz) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \\ I(zox) = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9.2)$$

٢ – عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور :

$$\left.\begin{array}{l} I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9.3)$$

٣ – عزم القصور الذاتى بالنسبة لنقطة ،

ويعرف هذا العزم أيضاً بعزم القصور الذاتى القطبى ؛

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad \ldots\ldots\ldots (9.4)$$

ونلفت النظر أن معادلات عزم القصور الذاتى أعلاه كانت لنقاط مادية أما إذا كان الجسم متصلاً فإننا نستبدل علامة التكامل بعلامة التجميع ..

$$I = \int P d^2 . dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9.5)$$

حيث P هى كثافة الجسم الحجمية .

9.2 العلاقة بين مختلف عزوم القصور الذاتى :

بجمع عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور الثلاثة (أى بجمع المعادلات (9.3)) نحصل على المعادلات (9.4) وذلك بعد قسمة الجمع على 2 :

$$I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.6)$$

هذا ويمكن للقارىء أن يستنتج عزم القصور الذاتى بالنسبة لمختلف المستويات من المعادلات (9.3) حيث :

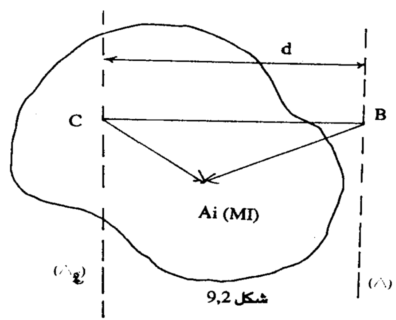
$$I_{(xoy)} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})$$

$$I_{(yoz)} = \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.7)$$

$$I_{zox} = \frac{1}{2} (I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})$$

9.3 نظرية هيجنز للمحاور المتوازية :

عزم القصور الذاتى لمجموعة من النقاط المادية بالنسبة لمحور ما (△) يكون مساوياً لحاصل جمع عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور ($△_c$) الموازى للمحور (△) والمار بمركز الكتلة C ، وعزم القصور الذاتى بالنسبة لـ (△) للكتلة الكلية المركزه فى C .



شكل 9,2

الإثبـــــات :

لتكن A_i نقطة مادية من مجموعة النقاط . عند هذه النقطة يمر مستوى عمودى على كل من المحورين المتوازيين ($\triangle_c$) و ($\triangle$) كما بالشكل 9.2 . ولتكن المسافة بين المحورين هى d .

عزم قصور الذاتى بالنسبة للمحور ($\triangle$) يكون :

$$I_{\triangle\triangle} = \Sigma\, m_i \,.\, \overrightarrow{BA}_i^2$$

ومن العلاقات الاتجاهية نكتب :

$$\overrightarrow{BA}_i = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}_i$$

بالتعويض عن المتجه $\overrightarrow{BA}_i$ نجد :

$$I_{\triangle\triangle} = \Sigma\, m_i \,.\, (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}_i)^2 = \Sigma\, m_i \,.\, \overline{BC}^2 + \Sigma\, m_i \,.\, \overline{CA_i}^2$$

$$+ 2\,\Sigma\, m_i \,.\, \overrightarrow{CA}_i \,.\, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2\,\Sigma\, m_i + \Sigma\, m_i \,.\, \overrightarrow{CA}_i^2$$

$$+ 2\,\overrightarrow{BC} \,.\, \Sigma\, m_i \,.\, \overrightarrow{CA}_i$$

ومن النظريات الخاصة بالعزوم نجد أن :

$$\Sigma\, m_i\, \overrightarrow{CA}_i = M \,.\, \overrightarrow{r_c} = 0$$

$$\therefore I_{\triangle\triangle} = I_{\triangle c} + M.d^2 \qquad \text{........................ (9.8)}$$

حيث :

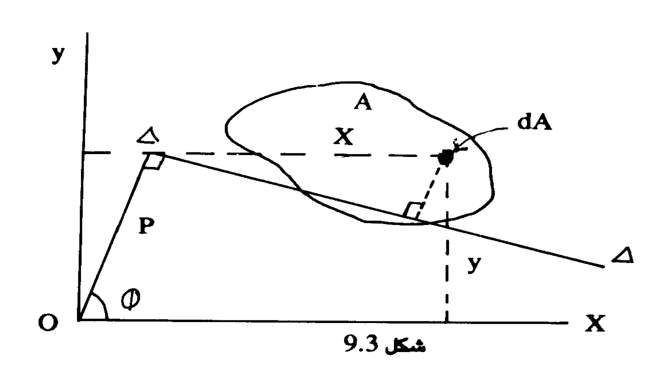
$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

9.4 عزم القصور الذاتى بالمستوى :

إذا كانت الأشكال المتعامل معها عبارة عن مساحات تقع فى مستوى فإننا فى هذه الحالة يمكننا أن نختصر ونبسط المعادلات أعلاه ، فإذا فرض وأن المستوى المعنى هو XOY وأن المراد دراسة عزوم قصور الذاتى لمساحة بهذا المستوى فإننا يمكن أن نستعين بالمعادلات (9.3) فتصبح :

$$I_{xx} = \int_A y^2 \, d A \quad , \quad I_{yy} = \int_A X^2 \, d A \qquad \text{.................... (9.9)}$$

حيث dA هى مساحة عنصر صغير بالمساحة المطلوب دراستها . انظر شكل 9.3 . أما A فهى مساحة القطاع كله .



شكل 9.3

ويكون عزم القصور الذاتى بالنسبة لأى محور بالمستوى كالمحور △△ بالشكل :

$$I_{\triangle\triangle} = \int_A d^2 \, d A \qquad \text{.................... (9.10)}$$

هذا ونعرف نصف قطر القصور الذاتى لأى محور بالمعادلة التالية :

$$r_{\triangle} = \sqrt{\frac{I_{\triangle\triangle}}{A}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.11)$$

هذا ويمكن تعريف حاصل ضرب القصور الذاتى (أو عزم القصور الذاتى المختلط) بالمعادلة التالية :

$$I_{xy} = \int_A x\,y\,dA \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.12)$$

ويكون I_{XY} صفر إذا كان أحد المحورين محور تماثل للشكل .

أما عن عزم القصور الذاتى القطبى بالمستوى فيمكن أن يشتق من المعادلة (9.4) .

$$I_o = \int_A r^2\,dA = \int_A (x^2 + y^2)\,dA \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.13)$$

$$\therefore\ I_0 = I_{xx} + I_{yy} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.14)$$

والمعادلة (9.14) بالمستوى XOY هى المعادلة التى تشبه المعادلات (9.6) بالفراغ .

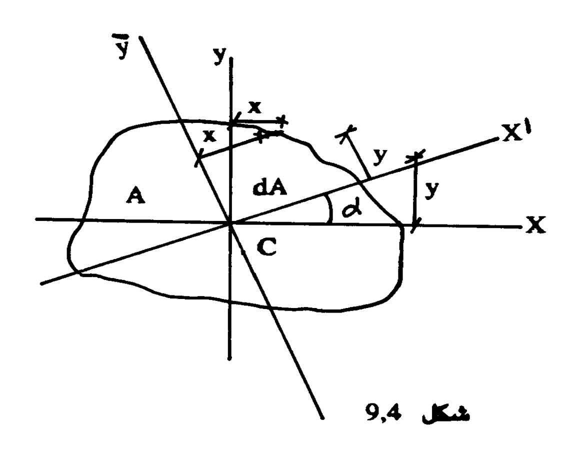
9.5 عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى :

لنفرض أن هناك قطاع ما مساحته A ومركز ثقله C كما بالشكل 9.4 . إذا علم كل من I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} . فالمطلوب حساب $I_{x`x`}$, $I_{y`y`}$ بالنسبة للمحاور $X`$ , $Y`$ المعرفة بالشكل 9.4 والتى تميل بزاوية α على المحور الأفقى .

المطلوب كذلك إيجاد القيمة العظمى والصغرى للعزم $I_{xx`}$ وذلك بإجراء عملية دوران للمحاور (بتغير قيمة α) .

بتطبيق المعادلات (9.9) نجـــد :

$$I_{xx}^{``} = \int_A y^{`2}\, d\, A$$



شكل 9,4

ومن هندسة الشكل نجد العلاقة التالية بين المحاور XY من ناحية و x`y` من ناحية أخرى :

$$Y^{`} = Y \cos \alpha - X \sin \alpha$$

$$X^{`} = Y \sin \alpha + X \cos \alpha$$

بالتعويض عن `y نجد :

$$I_{x'x'} = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 \, dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int y^2 \, dA + \sin^2 \alpha \int x^2 \, dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy \, dA$$

$$= I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos a$$

$$= I_{xx} \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + I_{yy} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x'x'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \qquad \text{......... (9.15)}$$

وبنفس الطريقة يمكننا إيجاد $I_{y'y'}$ أو باستبدال α بالمعادلة (9.15) حيث :

$$\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

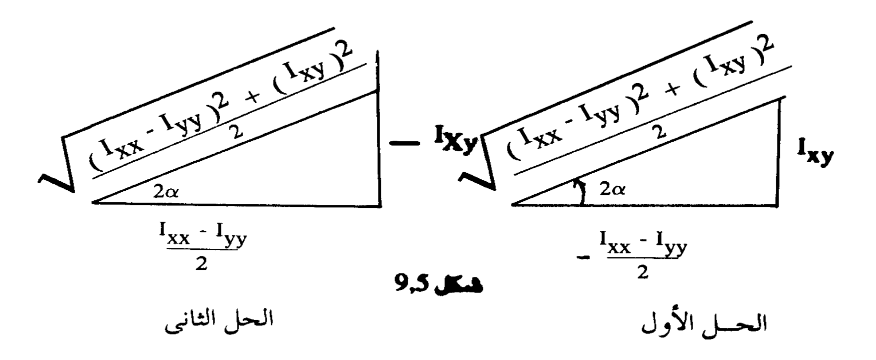
$$I_{y'y'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{2} \right) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \qquad \text{......... (9.16)}$$

هذا ويمكن الحصول على النهاية العظمى والصغرى لعزم القصور الذاتى $I_{x'x'}$ بإجراء عملية تفاضل هذا العزم بالنسبة للزاوية α ومساواة بالصفر لنحصل على :

$$\frac{d I_{x'x'}}{d \alpha} = - (I_{xx} - I_{yy}) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\therefore \tan 2\alpha = - \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy})} \qquad \text{................. (9.17)}$$

المعادلة (9.17) يمكن أن تعطى الزاوية التى تجعل $I_{x'x'}$ عظمى ، وصغرى حيث إن (9.17) لها حلان كما يتضح من الشكل التالى (9.5) :



شكل 9.5

الحل الثانى   الحــل الأول

وبالتعويض عن α 2 فى المعادلة (9.15) نحصل على :

$$I_{x`x`\,\substack{max\\min}} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{xx}-I_{yy})^2}{4}+(I_{xy})^2} \qquad \text{(9.18)}$$

حيث الإشارة + تكون للحل الثانى ، والسالبة للحل الأول بالشكل 9.5 .

وتعتبر المعادلة (9.18) هى التى تعطى عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى ، وذلك بالنسبة للمحاور التى بالشكل 9.4 وتسمى هذه العزوم بعزوم القصور الأساسية والمحاور التى تحسب حولها أى `x و `y بالمحاور الأساسية .

ويمكننا الآن أن نثبت أن عزم القصور الذاتى المختلط $I_{x`y`}$ يكون صفراً .

$$I_{x`y`} = \int x`y`\,dA$$

$$= \int (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\,dA$$

$$= \cos^2\alpha \int (xy)\,dA - \sin^2\alpha \int xy\,dA$$

$$+ \sin\alpha\cos\alpha \int y^2\,dA - \sin\alpha\cos\alpha \int x^2\,dA$$

$$= I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + (I_{xx} - I_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha$$

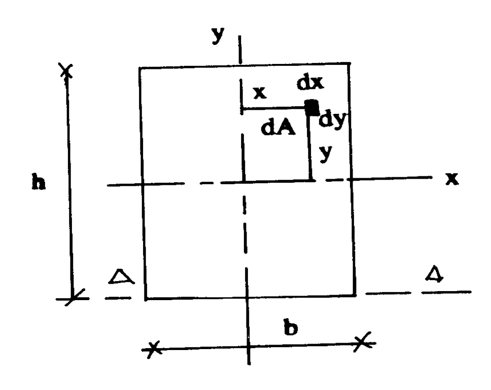
$$I_{x`y`} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \qquad \text{........................ (9.19)}$$

بالتعويض فى (9.19) عن قيمتى 2α من الرسم بالشكل 9.5 فإننا نجد أن المعادلة (9.19) تتلاشى .

ونستنتج مما سبق أن هناك محورين يكون عزم القصور الذاتى حولهما ذو قيمة عظمى وصغرى ، وأن هذين المحورين يتلاشى حولهما حاصل ضرب القصور الذاتى ، ويعرف المحوران بالمحورين الأساسيين .

9.6 أمثلة محولة :

١ - **أوجد** I_{xx} ، I_{yy} ، $I_{\triangle\triangle}$ ، $r_{\triangle}$ للمستطيل بالشكل التالى :



الحـــل :

I_X

بتطبيق المعادلة (9.9) :

$$I_{xx} = \int_A Y^2 \, dA \quad = \int\int y^2 \, dx \, dy$$

$$= b \int y^2 \, dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int dA = \int\int X^2 \, dy \, dx = h \int dx = h \left[\frac{X^3}{2} \right]$$

$$I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية (9.8) نجد :

$$I_{\triangle\triangle} = I_{xx} + A \cdot d^2 + b \frac{h^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^2}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

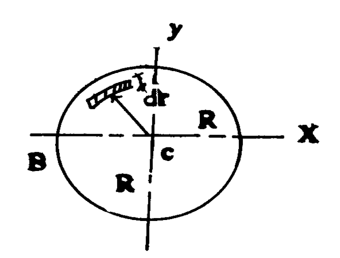
$$r_{\triangle} = \sqrt{\frac{I_{\triangle\triangle}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3 / 3}{bh}} = \frac{h}{3} \sqrt{3}$$

2 – أحسب عزم القصور الذاتى لقرص متجانس ثابت السمك وذلك بالنسبة :

(أ) محور عمودى على القرص ومار بمركزه .

(ب) محور عمودى على القرص ومار بأحد نقط محيطة .

(جـ) محور ينطبق على أحد أقطاره .



الحـــل :

المحور العمود على القرص والمار بمركزه يكون هو المحور z وهو منطبق فى هذه الحالة على المركز c ، وبالتالى يكون عزم القصور الذاتى حول المحور العمودى مساوياً لعزم القصور الذاتى حول مركزه C . وهذا يتضح من مقارنة المعادلة (9.3) بالمعادلة (9.13) .

$$I_c = \int r^2 \, dA = \int (x^2 + y^2) \, dA = \int x^2 \, dA + \int y^2 \, dA$$

$$I_c = I_{xx} + I_{yy} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وفى هذه الحالة نجد أن العنصر المقترح مساحته :

$$dA = 2\pi r . dr$$

$$\therefore I_c = \int_0^R r^2 \, 2\pi r \, . \, dr = \int_0^R 2\pi r^3 \, . \, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$I_c = \frac{R^4 \pi}{2}$$

وبتطبيق نظرية المحاور المتوازية يمكن إيجاد عزم القصور الذاتى حول محور عمودى على القرص ومار بأحد نقط محيطة فنجد :

$$I_B = I_C + AR^2 = \frac{R^4 \pi}{2} + \pi \; R^2 R^2 = \frac{3\pi \quad R^4}{1}$$

من المعادلة رقم (1) أعلاه وكذلك من التماثل الواضح بالشكل نجد :

$$_{xx} = I_{yy} = \frac{I_c}{2} = \frac{R^4 \pi}{4}$$

٣ – احسب عزم القصور الذاتى لكرة مصمته متجانسة نصف قطرها R وذلك بالنسبة :

(أ) مركزها .

(ب) قطرهـــا .

الحـــــل :

فى هذه الحالة يكون مركز الكرة مثل المحور المار ، عمودى على مركز القرص بالمثال السابق ، وهذا كما ذكرنا واضح من مقارنة (9.4) مع (9.13) ، وبالتالى فإننا يمكن أن نستفيد من النتيجة بالمثال السابق فنجد أن عزم القصور للكرة حول مركزها :

$$I_o = \frac{R^4 \pi}{2}$$

وبتطبيق المعادلة (9.4) نجد :

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \int (x^2\, dV + \int y^2\, dv + \int z^2\, dv$$

$$I_0 = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3\, I_{xx} = 3\, I_{yy} = 3\, I_{zz}$$

وذلك نتيجة للتماثل ومن ثم فإننا نحصل على عزم القصور الذاتى حول القطر :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I_0 = \frac{R^4 \pi}{4}$$

4 – كتلتان مركزتان كل منهما فى نقطة m_1 , m_2 وهما متصلتان بواسطة قضيب صلب وزنه يمكن إهماله ، وطوله a . أثبت أن عزم القصور الذاتى للمجموعة $(m_1 + m_1)$ بالنسبة لمحور عمودى على المستوى الذى يجمع الكتلتان والمار بمركز محصلتهما يكون مقداره μa^2 حيث : $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

a

c

m_1 m_2

x_1 $(m_1 + m_2)$ x_2

الحـــل :

كما بالشكل نفرض أن المحصلة تبعد X_1 عن m_1 وتبعد X_2 عن m_2 وبالتالى نحصل على :

$$X_1 = \frac{a\, m_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad X_2 = \frac{a\, m_1}{m_1 + m_2}$$

ولدينا أن : $X_1 + X_2 = a$

بتطبيق المعادلة (9.1) لإيجاد عزم القصور الذاتى حول المحور المار بالنقطة C نجد :

$$I_{zz} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2$$

$$= m_1 \frac{a\, m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{a^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$I_{zz} = \frac{a^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu\, a^2$$

٥ – احسب عزم القصور الذاتى للقطاع على شكل حرف T وذلك حول :

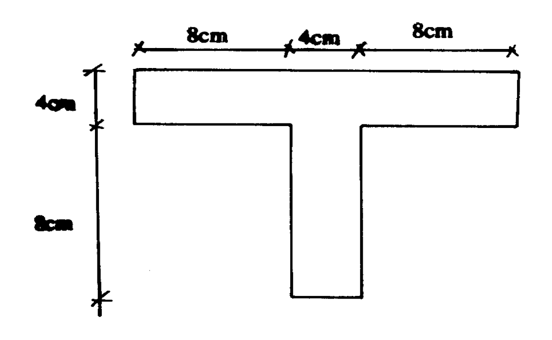
(أ) محور أفقى مار بمركز ثقله .

(ب) محور أفقى مار بنهايته السفلى .

الحـــل :

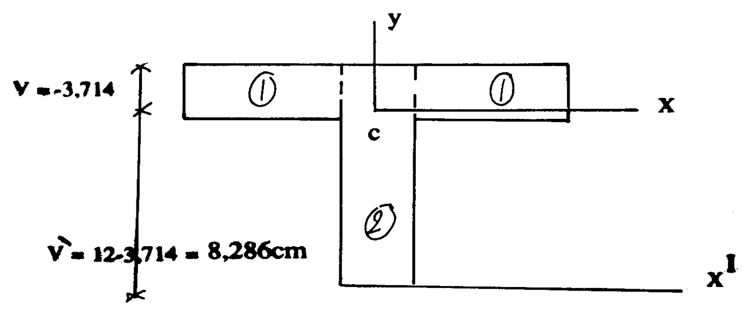
يمكن أن نستخدم نتائج المثال رقم 6 فى الفصل الثامن والخاص بتعيين مركز ثقل هذا القطاع وذلك بالتعويض عن قيمة

$l = 4$ cm



وبالتالى فإننا نجد :

$$\nu = \frac{13\ L}{14} = \frac{13 \times 4}{14} = 3.714 \text{ cm}$$



$I_{xx} = I_1 + I_2$

حيث : I_1 = عزم القصور الذاتى للمستطيل رقم (١) حول xx

حيث : I_2 = عزم القصور الذاتى للمستطيل رقم (2) حول xx

$$I_1 = \frac{8\,(4)^3}{12} \times 2 + 2 \times 8 \times 4\,(3.714 - 2)^2 = \frac{256}{3} + 188.019 = 273.352$$

$$I_2 = \frac{4\,(12)^3}{12} + 4 \times 12\,(6 - 3.714)^2 = 576 + 250.838 = 826.838$$

$$I_{xx} = 273.352 + 826.838 = 1100.19 \text{ cm}^4$$

ويمكن تطبيق نظرية المحاور المتوازية لإيجاد عزم القصور الذاتى حول `x هذا علماً بأن المساحة قد تم حسابها فى المثال رقم 6 بالفصل الثامن .

$$A = 7\ell^2 = 7\,(4)^2 = 112 \text{ cm}^2$$

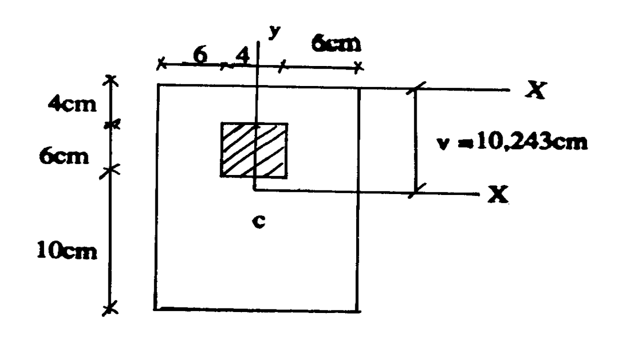
$$I_{x\grave{}x\grave{}} = I_{xx} + A\,(\nu\grave{})^2$$

$$= 1100.19 + 112\,(8.286)^2 = 8789.863 \text{ cm}^4$$

6 – أحسب عزم القصور الذاتى للمستطيل الذى قطع منه جزء بالشكل التالى وذلك حول :

(أ) محور مار بمركز ثقله ويكون أفقياً .

(ب) محور مار بأعلى الشكل ويكون أيضاً أفقيا .



لنعتبر المستطيل الكامل (بدون استقطاع) هو رقم (1) . والجزء المستقطع (المهشر) هو رقم (2) لنقيم الجدول التالى :

	b	h	b h	d	d(bh)	s*	I_G**	(bh)s 2
1	16	20	320	10	3200	0,243	$\frac{3200}{3}$	18.8 * 957
2	4	6	24	7	-168	3,243	- 72	- 252,409
Σ			296		3032		10594,7	233,513

* S = المسافة بين مركز ثقل الجزء المعنى ((1) أو (2)) ومركز ثقل الشكل كله .

** I_G = عزم القصور الذاتى للجزء المعنى حول محور أفقى مار بمركزه .

ويكون عزم القصور الذاتى هو :

$$I_{xx} = \Sigma I_G + \Sigma (bh) s^2 = 10594.7 + (-233.513)$$

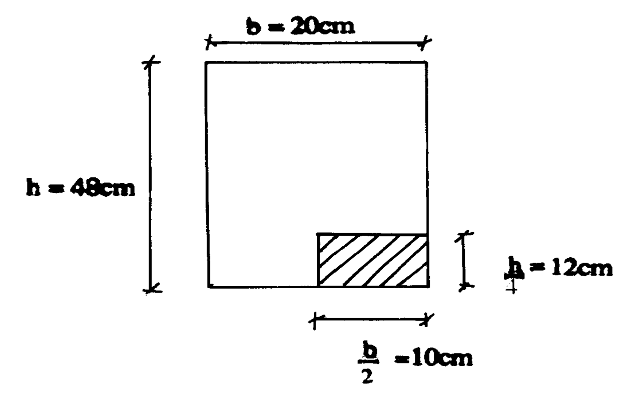
$$I_{xx} = 10361.187 \text{ cm}^4$$

وبتطبيق قاعدة المحاور المتوازية يمكن إيجاد عزم القصور الذاتى حول المحور `x :

$$I_{x\grave{x}} = I_{xx} + A(\nu)^2 = 10371.187 + 296(10.243)^2$$

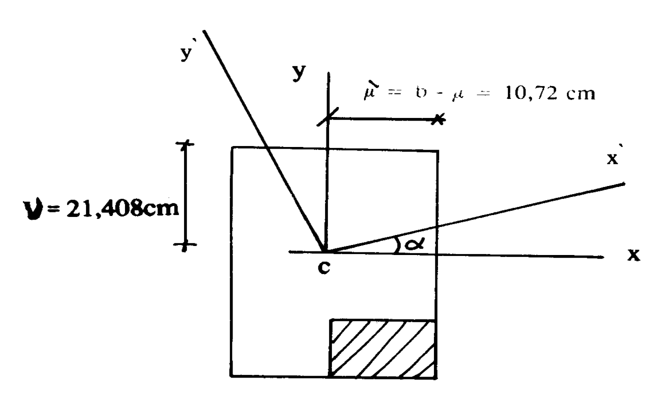
$$I_{x\grave{x}} = 41417.226 \text{ cm}^4$$

٧ - أوجد المحاور الأساسية المارة بمركز ثقل الشكل التالى وعزم القصور الذاتى حولها .



الحـــل :

مركز ثقل هذا الشكل تم إيجاده بالمثال رقم 8 بالفصل الثامن ، ويمكن بالتالى التعويض فيه بالأرقام المبينة لكل من العرض والارتفاع لنحصل على :



$$\nu = 0.446(48) = 21,408 \text{ cm}$$

$$\mu = 0.464(20) = 9.28 \text{ cm}$$

نبدأ بإيجاد عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور X , Y أى :

$$I_{xx} , I_{yy} , I_{xy}$$

وذلك بتطبيق العلاقات (9.9) و (9.12) بالإضافة إلى نظرية المحاور المتوازية نجد :

$$I_{xx} = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

حيث I_1 = عزم القصور الذاتى للمستطيل الكلى دون استقطاع حول X .

I_2 = عزم القصور الذاتى للفراغ (المهشر) حول X .

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + A \cdot d_1^2 = \frac{20\,(48)^3}{12} + 20 \times 48\,(\frac{48}{2} - 21.408)^2$$

$$I_1 = 184320 + 6449.725 = 190769.73\ cm^4$$

$$I_2 = -[\frac{\frac{b}{2}(\frac{h}{4})^3}{12} + \frac{b}{2}\frac{h}{4}(d_2)^2] = -[\frac{10(12)^3}{12} + 10 \times 12\,(26.592-6)^2]$$

$$= -[1440 + 50883.656] = -52323.656\ cm^4$$

من المعادلة (١) نجد :

$$I_{xx} = 190769.73 - 52323.656 = 138446.07\ cm^4$$

$$I_{yy} = I_3 + I_4 \qquad (2)$$

حيث : I_3 = عزم القصور الذاتى للمستطيل الكلى دون استقطاع حول محور Y .

I_4 = عزم القصور الذاتى للفراغ (المهشر) حول المحور X .

$$I_3 = \frac{hb^3}{12} + A\,t_1^2 = \frac{48\,(20)^3}{12} + 48 \times 20\,(\frac{20}{2} - 9.28)^2$$

$$= 32000 + 497.664 = 32497.664\ cm^4$$

$$I_4 = -[\frac{\frac{h}{2}(\frac{b}{4})^3}{12} + \frac{h}{4}\frac{b}{2}t_2^2] = -[\frac{10(12)^3}{12} + 12 \times 10\,(10.72 - 5)^2]$$

$$= -[1000 + 3926.208] = -4926.208\ cm^4$$

بالتعويض فى (2) نجد :

$$I_{yy} = 32497.664 - 4926.208 = 27571.456 cm^4$$

$$I_{xy} = I_5 + I_6 \quad ....(3)$$

حيث : I_5 = عزم القصور الذاتى المختلط للمستطيل كاملاً حول XY .

I_6 = عزم القصور الذاتى المختلط للفراغ حول XY .

$$I_5 = 0 + A(-24 + 21.408)(-10 + 10.72) = -1791.59 \text{ cm}^4$$

$$I_6 = -\left[0 + \frac{b}{2}\frac{h}{4}(10.72 - 5)(-26.592 + 6)\right] = 14134.349 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{xy} = -1791.59 + 14134.349 = 12342.859 \text{ cm}^4$$

لإيجاد قيمة α نطبق العلاقة (9.17) :

$$\tan 2 = -\frac{1232.759}{\frac{1}{2}(138446.07 - 27571.456)} = -0.223$$

$$\because 2\alpha_1 = 347.429^\circ \quad , 2\alpha_2 = 167.4290$$

$$\alpha_1 = 173.715^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 83.715^\circ$$

لإيجاد عزم القصور الذاتى حول تلك المحاور الأساسية نطبق المعادلات (9.15) , (9.16) أو (9.18) .

$$I_{x`x`} = \frac{133446.07 + 27571.456}{2} + \frac{27571.456 - 138446.07}{2}$$

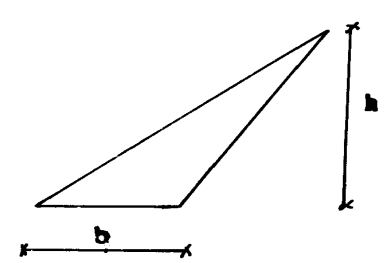
$$\cos 347.429 \quad - 12342.759 \sin 347.429^\circ = 139803.47 \text{cm}^4$$

$$I_{y`y`} = \frac{138446.07 + 27571.456}{2} + \frac{27571.456 - 138446.07}{2}$$

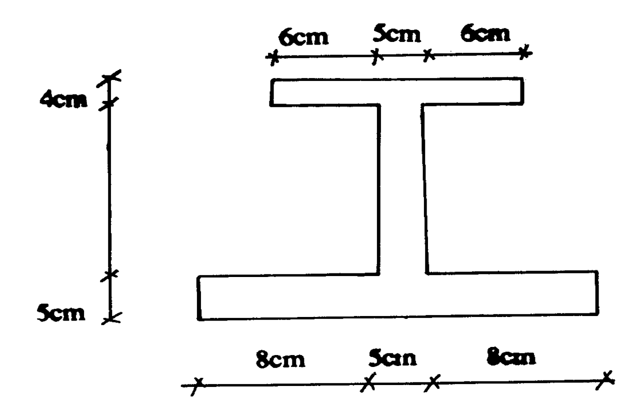
$$\cos 347.429 \, [\, + 12342.759 \sin 347.429^\circ = 26214.06 \text{ cm}^4$$

9.7 تمارين :

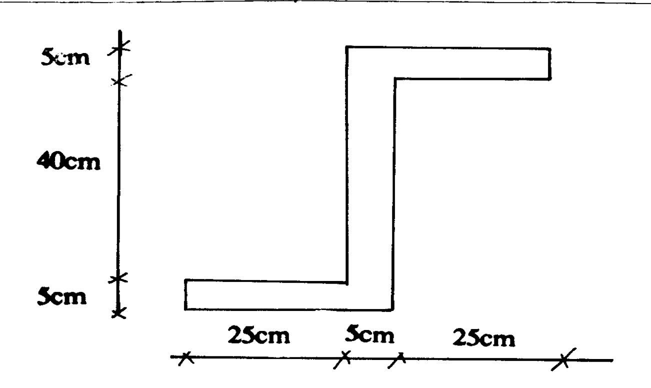
١ – أوجد عزم القصور الذاتى للمثلث حول محور يمر بقاعدته ، أوجد كذلك عزم القصور الذاتى حول محول مار بمركز ثقل المثلث وموازى لقاعدته .



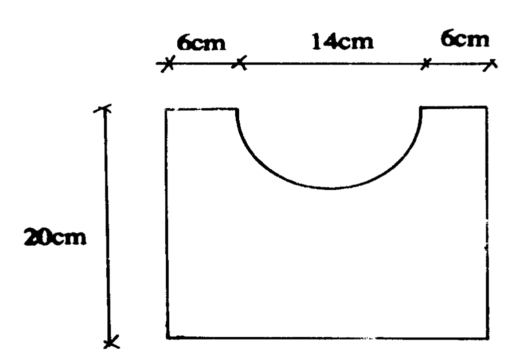
٢ – المطلوب إيجاد عزم القصور الذاتى للقطاع التالى حول محور أفقى مار بمركز ثقله ، وكذلك إيجاد نصف قطر القصور الذاتى حول نفس المحور .



٣ – للشكل التالى أوجد المحاور الأساسية ، وكذلك عزم القصور الذاتى حولها .



٤ – المستطيل التالى استقطع منه نصف دائرة ، والمطلوب إيجاد عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى للشكل المتبقى .

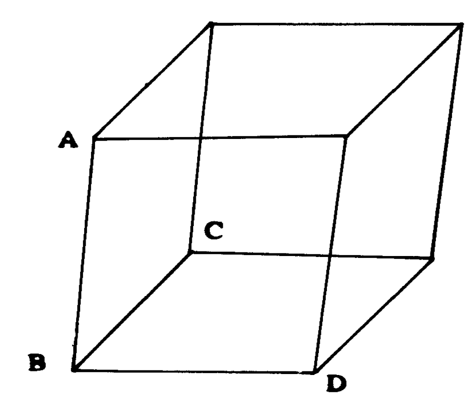


الباب العاشر

مسائل متنوعـــة

1.1 المطلوب إيجاد ارتفاع الشكل المبين بالرسم التالى حيث :

A(3,2,1) B(1,1,0) , C(3,-1,1) , D(-1,0.2)



الحـــل :

نعلم أن حجم هذا الشكل يمكن الحصول عليه بإجراء عملية ضرب مختلط تبعاً لما جاء بالفقرة (1.36) :

$$\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}) = 2 \triangle DBC \cdot h \qquad (1)$$

وتبعا لحاصل الضرب الاتجاهى
فإننا نجد بتطبيق المعادلة (1.29) أو (1.34) أو (1.35)

$$2 \triangle DBC = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}$$

ثم بإجراء عملية قسمة يمكن أن نجد ارتفاع الشكل h . وتكون الخطوات كالتالى :

$$\overrightarrow{BA} = (3-1)\,\vec{i} + (2-1)\,\vec{j} + (1-0)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\,\vec{i} + (-1-1)\,\vec{j} + (1-0)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = (-1-1)\,\vec{i} + (0-1)\,\vec{j} + (2-0)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}$$

من المعادلة (1.35) :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4)\,\vec{i} + (4+2)\,\vec{j} + (4+2)\,\vec{k} = 3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

وتكون قيمة $\vec{a}$ من (1.16)

$$|\,a\,| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (6)^2} = 9 = 2 \triangle DBC$$

والآن بتطبيق المعادلة (1.36) نحصل على :

$$\overrightarrow{BA}.\,\vec{a} = (2\,\vec{i} + \vec{j} + k).(3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 6\,\vec{k})$$

$$= 6 + 6 = 18 = 2 \triangle DBC \,.\, h$$

ويكون بالتالى ارتفاع الشكل هو :

$$h = \frac{18}{9} = 2$$

1.2 إذا علم أن :

$$\vec{A} = t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$$

حيث t متغير . فالمطلوب إيجاد التفاضل التالى :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

الحـــل :

من المعادلة (1.26) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k}) \quad (\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}) = t \cos t - \sin t$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \cos t - t \sin t - \cos t = t \sin t$$

1.3 أوجد مركبات واتجاهات متجه الوحدة المتعامد على كل من $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ حيث :

$$\vec{V_1} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \quad , \quad \vec{V_2} = \vec{i} + \vec{j} - 2 \,'$$

الحـــل :

نفرض أن متجه الوحدة هو :

$$\vec{U} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

فلدينا من المعادلة (1.16) :

$$|\,\vec{U}\,| = 1 = \sqrt{a^2_x + a^2_y + a^2_z}$$

$$a^a_x + a^2_y + a^2_z = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ومن تعامد $\vec{U}$ مع $\vec{V_1}$ يمكن أن نطبق (1.28) :

$$3\,a_x - z\,a_y + 4\,a_z = 0 \qquad (2)$$

ومن تعامد U مع V_2 يعطى :

$$a_x + a_y - 2\,a_z = 0 \qquad (3)$$

بحل هذه المعادلات الثلاث نجد أن مركبات متجه الوحدة :

$$a_x = 0 \quad , \quad a_y = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad a_z = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \vec{U} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{K}$$

وتكون اتجاهات متجه الوحدة من (1.17) :

$$\cos\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = 90°$$

$$\cos\beta = \frac{2/\sqrt{5}}{1} \longrightarrow \beta = 26.565°$$

$$\cos\gamma = \frac{1/\sqrt{5}}{1} \longrightarrow \gamma = 63.435°$$

1.4 – أوجد التفاضل الجزئى التالى : $\frac{\delta^2}{\delta x\,\delta y}(\vec{A} \wedge \vec{B})$ عند النقطة (1,- 1,2)

علماً بأن

$$\vec{A} = x^2\,\vec{i} - y\,\vec{j} + xz\,\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} - xyz\,\vec{k}$$

الحـــــل :

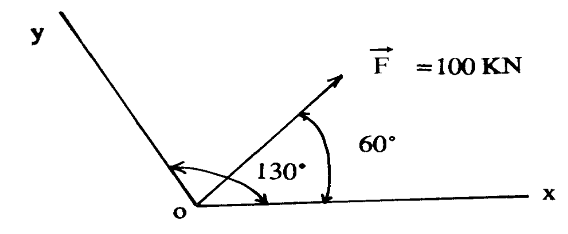
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x^2 & -y & xz \\ y & x & -xyz \end{vmatrix} = (xy^2Z - x^2Z)\,\vec{i} + (xyz + x^3\,yz)\,\vec{j} + (x^3 + y^2)\,\vec{k}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta x\, \delta y}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = 2\,y\,z\,\vec{i} + (Z + 3\,x^2\,Z)\,\vec{j}$$

عند النقطة $(1, -1, 2)$ نجد :

$$= 2(-1)\,2\,\vec{i} + (2 + 3\,(1)^2\,2)\,\vec{j} = -4\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$$

2.1 المطلوب إيجاد مركبات القوة F على المحورين بالشكل هذا علماً بأن قيمتها (100 KN) .



الحـــــل :

مسقط $|\vec{F}|$ على المحور الأفقي X :

$$F \cos 60° = 100 \cos 60 = 50 \text{ KN}$$

وهذا المسقط يكون مساوياً لمركبات $|\vec{F}|$ على كل من X وكذلك مركبة Y على $\bar{X}$

ومنها :

$$\therefore \vec{F} = \vec{OX} + \vec{OY'}$$

$$OX + (-oy' \cos 50°) = 50$$

$$oX - (0{,}643)\,oy' = 50 \quad \text{.....................} \quad (1)$$

وإذا أسقطنا على المحور العمودى على الرأسى نجد :

$oy` \cos 40° = F \cos 30°$ .... (2)

من المعادلة (2) نجد أن :

$$oy` = \frac{100 (0.866)}{0.766} = 113.055 \text{ KN}$$

ومن (1) نجد :

$$Ox = 50 + 0.643 \times 113.055 = 122,694 \text{ KN}$$

2.2 – بالإشارة للرسم بالمثال السابق إذا كان :

$|\overrightarrow{OY`}| = 105$ KN , $|ox| = 130$ KN , $|\overrightarrow{F}| = 100$ KN

المطلوب إيجاد الزاوية بين القوة $\overrightarrow{F}$ والمحور الأفقى ، وكذلك الزاويه بين المحورين .

الحـــل :

نفرض أن الزاوية بين القوة $\overrightarrow{F}$ والمحور الأفقى هى α ، وأن الزاوية بين المحورين هى β .

الإسقاط على المحور الأفقى يعطى :

$$130 + 105 \cos \beta = 100 \cos \alpha \qquad (1)$$

وعلى المحور الرأسى :

$$105 \sin \beta = 100 \sin \alpha \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نجد :

$$\sin \alpha = 1.05 \sin \beta \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - (1.05 \sin \beta)^2}$$

$$(1) \rightarrow 130 + 105 \cos \beta = 100 \sqrt{1 (1.05 \sin \beta)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد :

$$16900 + 27300 \cos \beta + 11025 \cos^2 \beta = 10000 - 11025 \sin^2 \beta$$

$$= 10000 - 11025 (1 - \cos^2 \beta)$$

$$= 10000 - 11025 + 11025 \cos^2 \beta$$

$$27300 \cos \beta = 10000 - 11025 - 16900$$

$$\cos \beta = -0.6566 \rightarrow \beta = 131°$$

ومن المعادلة (1) :

$$\cos \alpha = 1.3 + 1.05 \ (-0.6566) = 0.61057$$

$$\therefore \alpha = 52.37^\circ$$

2.3 – قوة مقدارها 250 KN تعمل بنقطة الأصل فى الاتجاهات :

$$\alpha = 65^\circ \quad , \ \beta = 40^\circ$$

ومعروف كذلك أن المركبة فى اتجاه المحور العمودى Z موجبة .

فالمطلوب إيجاد :

(أ) قيمة الزاوية التى تصنعها القوة مع المحور Z .

(ب) قيمة المركبات الثلاثة .

(جـ) عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة : A(1,-2,2)

الحـــــل :

نتيجة للمعادلات (2.6) يمكن أن نكتب :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

وبالتعويض عن α , β نحصل على :

$$\cos^2 65^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\because \cos^2 \gamma = 1 - 0.179 - 0.587 = 0.234$$

$$\gamma = 61^\circ$$

$$X = |\vec{F}| . \cos \alpha = 250 \cos 65^\circ = 105.65 \text{ KN} \qquad (1.2) \ , \quad (2.6)$$

$$Y = |\vec{F}| . \cos \beta = 250 \cos 40^\circ = 191.51 \text{ KN}$$

$$Z = |\vec{F}| . \cos \gamma = 250 \cos 61^\circ = 121.2 \text{ KN}$$

$$\therefore \vec{F} = 105.65 \ \vec{i} + 191.51 \ \vec{j} + 121.2 \ \vec{k}$$

ولإيجاد عزم هذه القوة حول النقطة A نكتب متجه الموضع فى الصورة :

$$\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \text{.......................... (2.12)}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ (105.65) & (191.51) & (121.2) \end{vmatrix} = (-2(121,2) - 2(191.51)]\ \vec{i} + [2(105.65) -1(121.2)]\ \vec{j} + [1(191.51) + 2(105.65)]\ \vec{k} = -625.42\ \vec{i} + 90.1\ \vec{j} + 402.81\ \vec{k}$$

وتكون مركبات هذا العزم :

$$|M_x| = -625.42 , |M_y| = 90.1 , |M_z| = 402.81 \quad (2.13)$$

وقيمتـــه :

$$|M_A| = \sqrt{(-65.42)^2 + (90.1)^2 + (402.81)^2} = 749.349 \quad (2.5)$$

أما الاتجاهات فتكون :

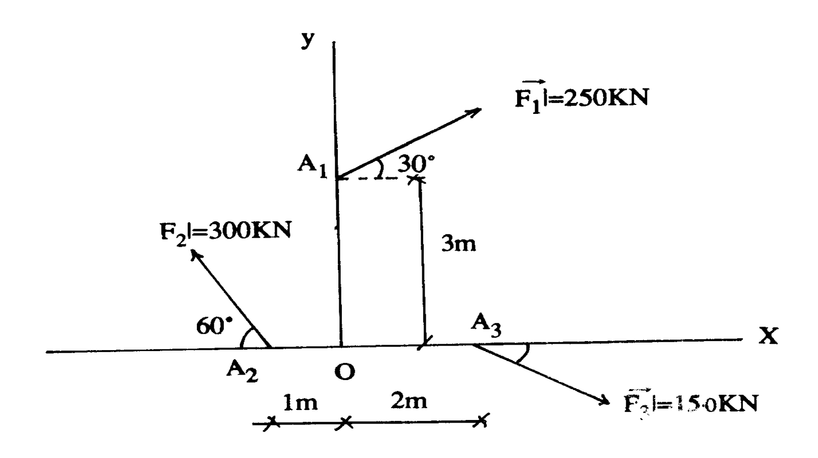
$$\cos\alpha_1 = \frac{-625.42}{749.349} = -0.8346 \rightarrow \alpha_1 = 146.576^\sim$$

$$\cos\beta_1 = \frac{90.1}{749.349} = +0.12 \rightarrow \beta_1 = 83.^\sim \quad (2.6)$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{802.81}{749.349} = +0.5375 \rightarrow \gamma_1 = 57.483^\sim$$

2.4 القوى $\vec{F_1}$ ، $\vec{F_2}$ ، $\vec{F_3}$ تؤثر فى النقط A_1 ، $\vec{A_2}$ ، A_3 بالمستوى XY كما هو موضح بالشكل والمطلوب :

(أ) إيجاد متجه كل قوة ومتجه موضعها .
(ب) محصلة تلك القوى واتجاهها مع المحور الأفقى .
(جـ) عزم هذه القوى حول النقطة O .
(د) نقطة تأثير المحصلة .



الحـــــل :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = X\ \vec{i} + Y\ \vec{j}$$

$$\vec{F_1} = 250 \cos 30\ \vec{i} + 250 \cos 60\ \vec{j}\quad , \quad \vec{r_1} = \vec{OA_1} = 3\ \vec{j}$$

$$\vec{F_2} = 300 \text{ Cos } 120\ \vec{i} + 300 \cos 30\ \vec{j}\quad , \quad \vec{r_2} = \vec{OA_2} = -\ \vec{i}$$

$$\vec{F_3} = 150 \text{ Cos } 330\ \vec{i} + 150 \cos 240\ \vec{j}\quad , \quad \vec{r_3} = \vec{OA_3} = 2\ \vec{i}$$

$$X = \sum_{i=1}^{3} X_i = 250 \text{ Cos } 30 + 300 \text{ Cos } 120 + 150 \text{ Cos } 330 = 196.4 \text{ kn}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{3} Y_i = 250 \cos 60 + 300 \cos 30 + 150 \cos 240 = 309.8$$

$$\vec{R} = 196.4 \vec{i} + 309.8 \vec{j}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{309.8}{196.4} = 1.577 \rightarrow \alpha = 57.625°$$

$$\vec{M_0} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i} = [+3(250 \cos 30) - 300 \cos 30 + 2(150 \cos 240)] \vec{k}$$

$$\vec{M_0} = [-649.519 - 259.8 - 150] \vec{k} = -1059.3 \vec{k}$$

$$|\vec{M_0}| = 1059.3 \text{ KN.m}$$

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة C لدينا :

$$X_c = \frac{\Sigma Y_i X_i}{\Sigma Y_i} \quad , \quad Y_c = \frac{\Sigma X_i Y_i}{\Sigma X_i}$$

حيث X_c ، Y_c هما إحداثيى نقطة تأثير المحصلة :

$$X_c = \frac{-300 \cos 30 + 2(150) \cos 240}{309.8} = -1.3$$

$$Y_c = \frac{-3 \times 250 \cos 30}{196.41} = -3.3$$

وبالتالى يكون متجه الموضع $\vec{r_C}$:

$$\vec{r_c} = -1.3 \vec{i} - 3.3 \vec{j}$$

2.5 عارضة AB طولها lom تؤثر عليها مجموعة القوى الرأسية المتوازية المبينة بالشكل التالى . المطلوب إيجاد محصلة هذه القوى وعزمها حول النقطة A .

A ——— 40KN ↓ (4m), 50KN ↑ (2m), 20KN ↑ (2m), 10KN ↓ (2m) ——— B

الحـــــل :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F_i}$$

$$|\vec{R}| = -40 + 50 + 20 - 10 = 20 \text{ KN} \uparrow$$

أى أن المحصلة تصنع زاوية مقدارها 90° مع المحور الأفقى ويمكن كتابتها كما يلى :

$$\vec{R} = 20 \vec{j}$$

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة سوف نحسب العزم حول النقطة A .

$$|\vec{M_A}| = 40(4) + 50(6) + 20(8) - 10(10) = 200 \text{ KN.m}$$

$$X_c = \frac{|M_A|}{|R|} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m}$$

ويكون متجه الموضع : $\vec{r_c} = 10 \vec{i}$

أما متجه العزم حول A فهو :

$$\vec{M_A} = 200 \vec{K}$$

وواضح أن العلاقة بين المتجهات الثلاثة هى :

$$\vec{M_A} = \vec{r_c} \wedge \vec{R}$$

2.6 أثبت أن فى حالة تغيير القوة 10 KN بالمثال السابق مع تغيير نقطة تأثير إلى 9 m عن A فإن المجموعة تؤول إلى ازدواج .

الحـــــل :

في هذه الحالة تصبح محصلة القوى :

$$\vec{R} = -40 + 50 + 20 - 30 = \vec{0}$$

وهذا أول شرط من شروط الازدواج

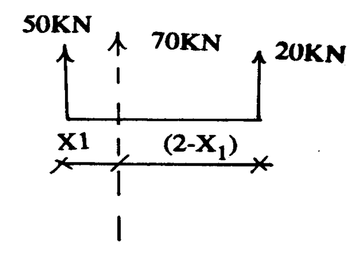
$$\Sigma M_A = -40(4) + 50(6) + 20(8) - 30(9) = 30 \text{ KN.m} \neq 0$$

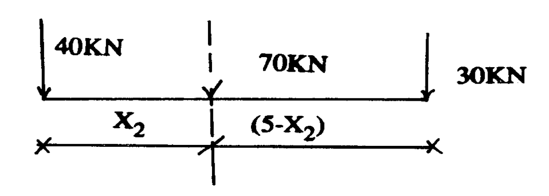
أى أن المجموعة غير متزنة ، وبالتالى تؤول إلى ازدواج انظر المعادلة (2.19) ويكون هذا الازدواج 30 KN.m حيث إن عزم مجموعة القوى لا يتغير .

ولإيجاد ذراع الازدواج أو المسافة بين قوتى الازدواج ، فواضح أن قوة الازدواج مقدارها 70 KN فتكون ذراع الازدواج .

$$d = \frac{30}{70} = \frac{3}{7} m$$

ولإيجاد نقطة تأثير كل قوة من قوى الازدواج فإننا نجد نقطة تأثير محصلة كل قوتين في نفس الاتجاه :



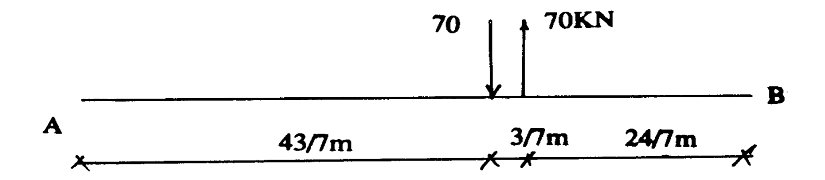


بأخذ العزوم حول القوة اليسرى لكل حالة نجد :

$$X_1 = \frac{30 \times 2}{70} = \frac{4}{7} m = 0.57 \ m$$

$$X_2 = \frac{30 \times 5}{70} = \frac{15}{7} m = 2.14 \ m$$

ويكون لدينا الشكل التالى للازدواج :



3.1- نقطة مادية معرضة للقوى :

$$\vec{F_1} = 5\ \vec{i} - 10\ \vec{j} + 15\ \vec{k} \qquad \vec{F_2} = 10\ \vec{i} - 25\ \vec{j} + 20\ k$$

$$\vec{F_3} = 15\ \vec{i} - 20\ \vec{j} + 10\ \vec{k}$$

أوجد القوة اللازمة لكى تصبح النقطة المادية فى حالة اتزان .

الحـــــل :

نفرض أن القوة اللازمة للاتزان هى F_4

بتطبيق المعادلات (3.2) نجد أن :

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \rightarrow 5\text{-}10 + 15 + X_4 = 0 \rightarrow X_4 = -10$$

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 0 \rightarrow -10 + 10 + 15 - 20 + Y_4 = 0 \rightarrow Y_4 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{4} Z_i = 0 \rightarrow 15 - 20 + 10 + Z_4 = 0 \rightarrow Z_4 = -10$$

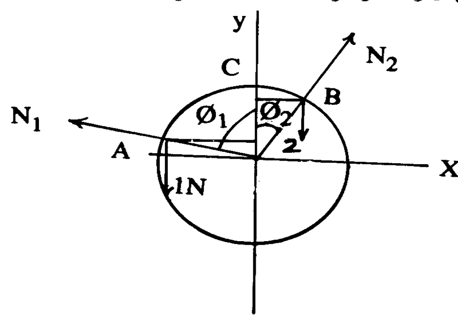
$$\therefore \vec{F_4} = -10\ \vec{i} + 5\ \vec{j} - 5\ \vec{k}$$

3.2 – بليتان A , B أبعادهما مهملة ، متصلتان بخيط AB طوله 0.2 متر ، وموضوعتان على اسطوانة دائرية المقطع وملساء محورها أفقى ونصف قطرها OA = 0.1 متر . وزن البلية A 1 نيوتن و B 2 نيوتن . أوجد الزاويتان Φ_1 , Φ_2 التى يصنعها نصفى القطر OA , OB مع الخط الرأسى OC وذلك فى حالة الاتزان . أوجد كذلك ردى الفعل N_1 , N_2 للأسطوانة على كل بلية عند النقطتين A , B .

الحـــــل :

محيط الدائرة $= 2\Pi r = 2\Pi (0,1)$
$= 0.628$

وهذا المحيط يقابل زاوية مركزية عند 0 مقدارها °360



وبالتالى فإن القوس AB يقابل زاوية مركزية يمكن الحصول عليها بالتناسب :

$$\therefore \phi_1 + \phi_2 = \frac{0.2 \times 360}{0.628} = 114.59°$$

بما أن البلية A = 1 نيوتن ، و B = 2 فإن محصلتهما تكون 3 نيوتن وهى تقسم المسافة بينهما بنسبة $\frac{1}{3}$ من B إلى $\frac{2}{3}$ من A . وبتطبيق نظرية القوى الثلاث فإن تلك المحصلة يجب أن تمر بنقطة تلاق القوتين N_1 , N_2 أى بنقطة 0 .

وبناء على ذلك فإنه إذا كانت المسافة فى اتجاه محور X بين AB (أى المسافة الأفقية بين البليتين) هى l . فإن الإسقاط على محور X يعطينا :

$(\frac{2}{3})\ell = AC$ مسقط

$(\frac{1}{3})\ell = BC$ مسقط

ومن التحليل السابق يمكن أن نجد بالاستعانة بالمعادلة (1) :

$$\phi_1 = \frac{2}{3}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{2}{3} \times 114.59 = 76.4°$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{3} \times 114.59 = 38.2°$$

وبتطبيق (3.3) :

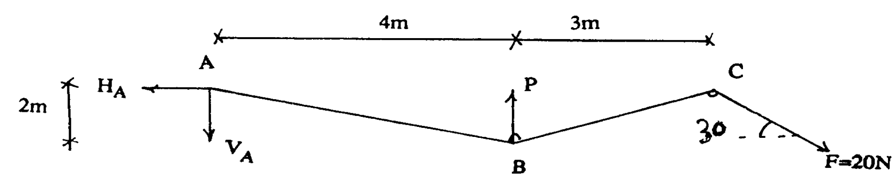
$$\Sigma X = 0 \rightarrow N_1 \sin\phi_1 = N_2 \sin\phi_2 \qquad (2)$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow N_1 \cos\phi_2 + N_2 \cos\phi_2 = 3 \qquad (3)$$

من (2) , (3) نجد أن :

$$N_1 = 2\,N \quad , \quad N_2 = 3.2\,N.$$

3.3 – حبل ABC مشدود إلى وتد عند نهايته C بقوة مقدارها 20 نيوتن تميل على الأفقى بزاوية 30° ومثبت عند A . فإذا علم أن C , A فى مستوى أفقى واحد فالمطلوب إيجاد قيمة القوة P التى يجب أن تؤثر عند B لحفظ الاتزان ، وكذلك قيم ردود الأفعال عند الطرف A



الحـــل :

بتطبيق معادلات الاتزان بالمستوى (3.3) , (3.6) نجد أن :

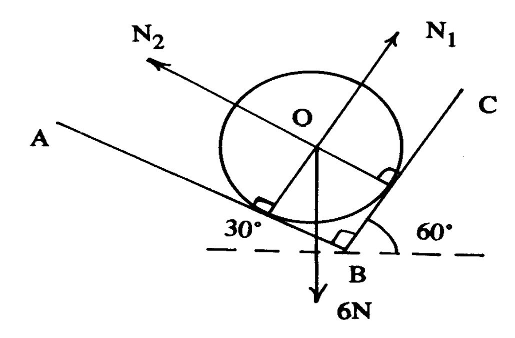
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 4P - 20 \sin 30° (7) = 0$

$P = +35 \sin 30° = 17.5\ N \uparrow$

$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 20 \cos 30 = 17.5\ N \leftarrow$

$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = 17.5 - 20 \sin 30° = 7.5\ N \downarrow$

3.4 – قرص متجانس وزنه 6 نيوتن يتزن على مستويين مائلين ومتعامدين على بعضهما البعض AB و BC . أوجد رد فعل كل مستوى على القرص ، وذلك مع العلم أن المستوى BC يصنع زاوية مقدارها 60° مع الأفقى .



الحـــل :

بتطبيق معادلات الاتزان فى المستوى (3.3) نجد ما يلى :

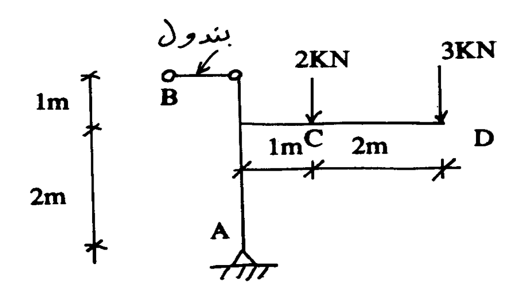
$N_1 \cos 60° = N_2 \cos 30° \quad .... (1)$

$N_1 \sin 60° + N_2 \sin 30° = 6 \quad .... (2)$

ومن المعادلتين (1) و (2) يمكننا إيجاد ردى الفعل N_1 , N_2 :

$$N_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} N \quad , \quad N_2 = \frac{3}{2} N$$

35 – المطلوب حساب ردود أفعال المنشأ ABCD بالشكل التالى :



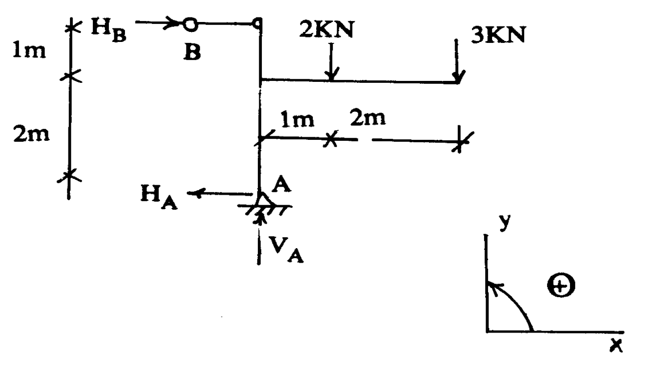
الحـــــل :

عدد ردود الأفعال بهذا المنشأ ثلاثة : اثنان عند الركيزة المزدوجة A رأسى V_A وأفقى H_A والبندول يتحمل رد فعل فى اتجاه محوره أى أفقى وليكن H_B .

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = 2 + 3 = 5 \ KN \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -H_B(3) - 2XI - 3 x 3 = 0$$

$$H_B = - [\frac{9 + 2}{3}] = - \frac{11}{3} KN$$

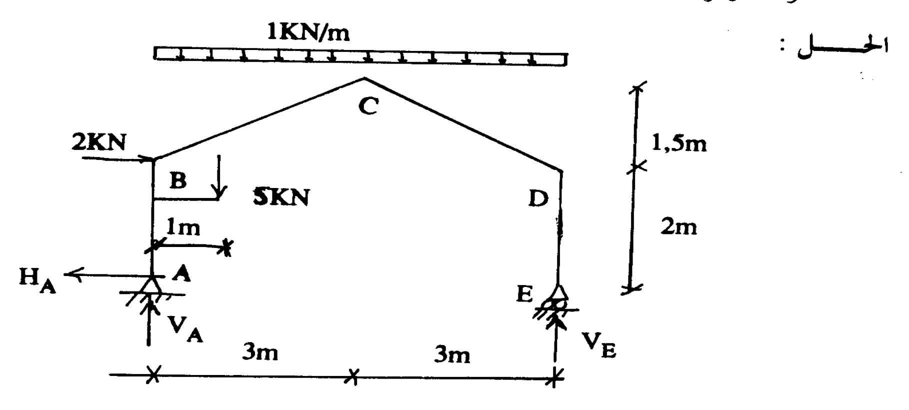


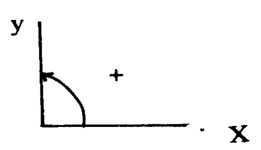
وحيث إن الإشارة سالبة فهذا يعنى أن H_B اتجاهها عكس المفترض أى إلى اليسار بدلاً من اليمين .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = H_B = \frac{11}{3} KN \rightarrow$$

3.6 – أوجد ردود أفعال المنشأ ABCD بالشكل :

الحـــل :





نفرض أن ردود الأفعال كما هو موضح بالرسم وإذا خرجت النتيجة سالبة نعكس الاتجاه .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 2\ KN \leftarrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 6V_E - 1 \times 6 \times \frac{6}{2} - 5 \times 1$$

$$- 2 \times 2 = 0 \rightarrow V_E = 4.5\ KN \uparrow$$

$$\Sigma M_E = 0 \rightarrow -6V_A + 1 \times 6 \times \frac{6}{2} + 5 \times 5 - 2 \times 2 = 0 \rightarrow$$

$$V_A = 6.5\ KN \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج :

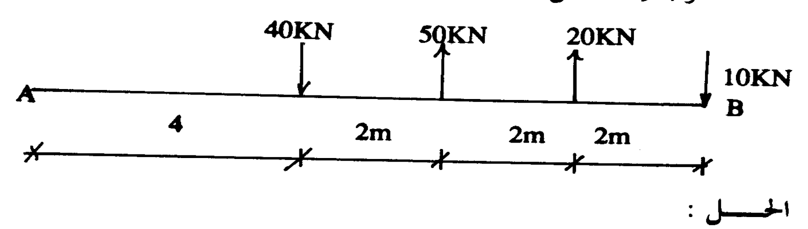
يجب أن نحقق المعادلة :

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_E - 1 \times 6 - 5 = 0$$

هـ . ط .

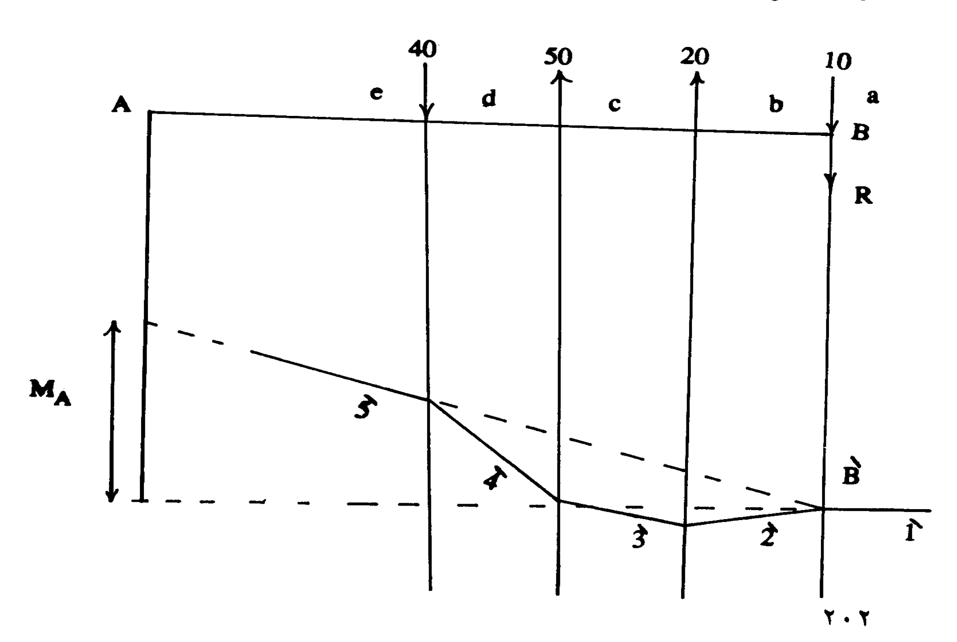
4.1 المطلوب إيجاد الحل البيانى للتمرين 2.5

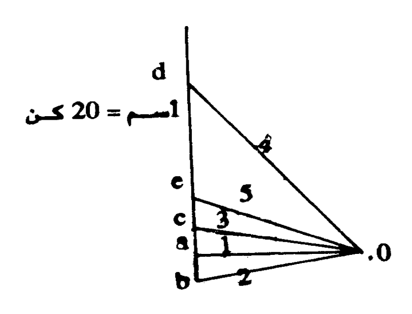


الحـــل :

نبدأ بتقسيم المساحة إلى مناطق (انظر الفقرة 4.4 المثال 4) وبعد ذلك نرسم مضلع القوى وهو فى هذه الحالة خط رأسى .

وتكون المحصلة من المضلع هى قيمة المتجه $\overrightarrow{ae}$ وذلك مع أخذ مقياس الرسم فى الاعتبار : $|\overrightarrow{R}| = |\overrightarrow{ae}| = 20\ KN$





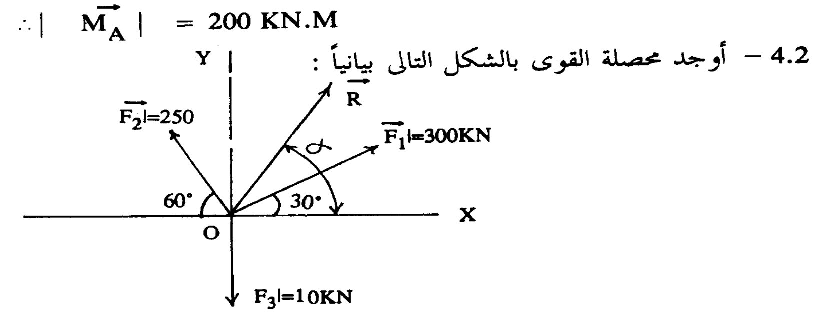
مضلع الأشعة القطبى

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة نرسم مضلع الأشعة القطبى (على نفس مضلع القوى) وذلك باختيار نقطة مثل 0 على نفس الخط الأفقى المار بالنقطة a ، ونصل 0 بكل المناطق لنحصل على الأشعة القطبية ، وبعمل موازيات لتلك الأشعة بالمناطق المناظرة لها بالشكل الأصلى نحصل على الأشعة 1َ , 2َ , 3َ , 4َ , 5َ امتداد 1َ , 5َ يلتقيان فى النقطة B` ، وبالتالى تكون نقطة تأثير المحصلة هى مسقط B` على العارضة أى نقطة B (كما سبق وحسبناها بالمثال 2.5) .

أما المسافة المحصورة ما بين امتداد كل من الشعاعين 1َ , 5َ أسفل A وعلى المحور الرأسى فتمثل قيمة العزم عند النقطة A لمجموعة القوى (انظر الفقرة 4.4 مثال 6) .

$\therefore |\overrightarrow{M_A}| = 200$ KN.M

4.2 – أوجد محصلة القوى بالشكل التالى بيانياً :



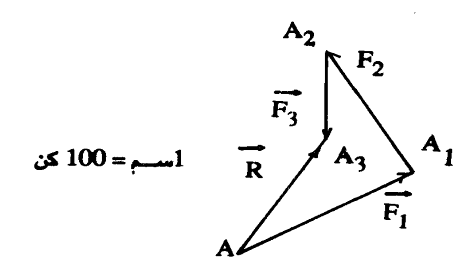
الحـــــل :

فى هذه المسألة نكتفى برسم مضلع القوى للثلاث قوى ، وتكون المحصلة هى المتجه الذى يقفل هذا المضلع باتجاه دورى مضاد . أما نقطة تأثيرها فلابد وأن تكون نقطة تلاقى القوى أى النقطة 0 .

$$|\vec{R}| = \overrightarrow{AA_3} = 255 \text{ KN}$$

ومن الرسم يمكن أن نقيس الزاوية مع الأفقى (α)

$$\alpha = 58°$$



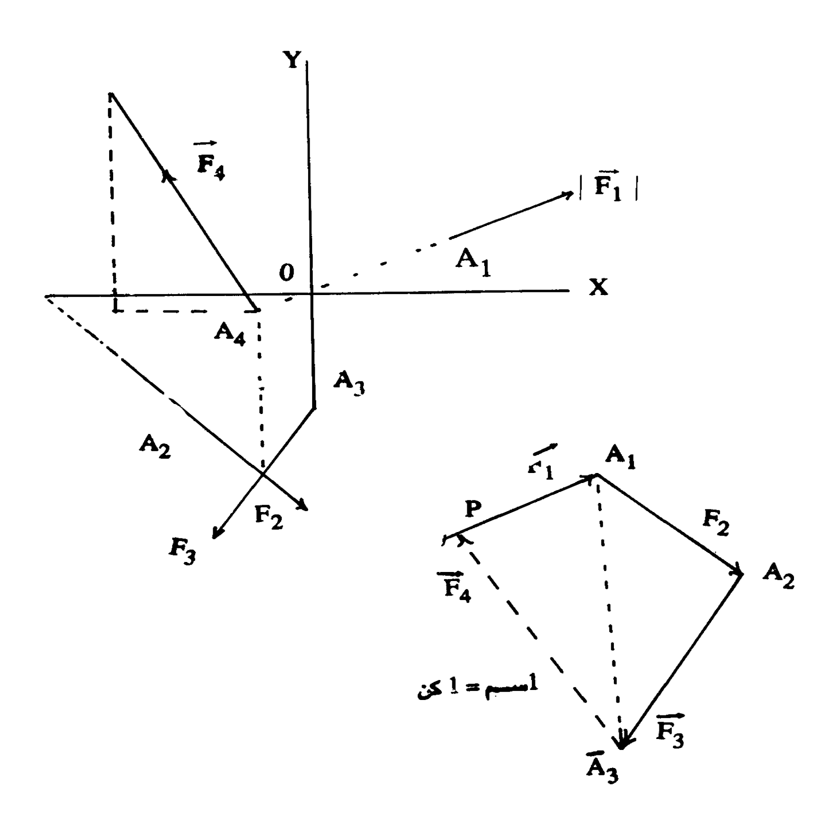
4.3 – المطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع القوى التالية بطريقة بيانية :

$$\vec{F_1} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad , \quad \vec{F_2} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \ , \ \vec{F_3} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$

والتى تؤثر بالنقاط : $A_3\,(0,-2)$, $A_2(2,-2)$, $A_1(2,1)$

الحـــــل :

نحاول أولاً توقيع هذه القوى على المستوى XY كما بالرسم التالى ، وبعد ذلك نرسم لها مضلع القوى والضلع الذى يقفل المضلع ، ولكن فى نفس الاتجاه هو القوة التى تجعل تلك المجموعة متزنة .



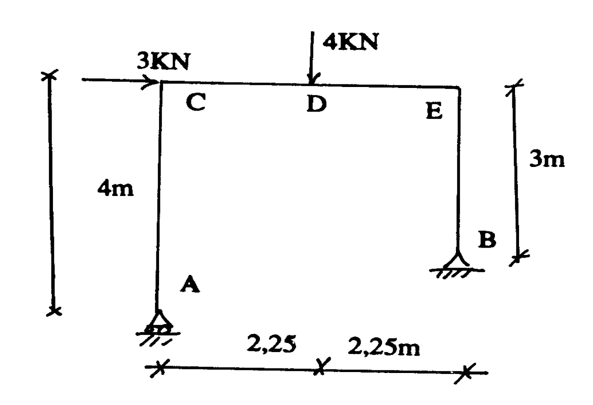
لإيجاد نقطة تأثير القوة التى تجعل هذه المجموعة متزنة أى $\vec{F_4}$ فإننا نحصل $\vec{F_2}$ و F_3 وحدهما فتكون المحصلة هى A_3A_1 بمضلع القوى والموازى لهذا المتجه ماراً بنقطة تلاقى تلك القوتين يعطى المحل الهندسى فى نقطة A_4 وهى نقطة التأثير المطلوبة – بقياس هذه القوة والزاوية التى نصنعها مع المحور الأفقى نجد ما يلى :

$$|\vec{F_4}| = 4.5 \text{ KN}, \alpha = 117°$$

ويمكن كتابة القوة فى الصورة

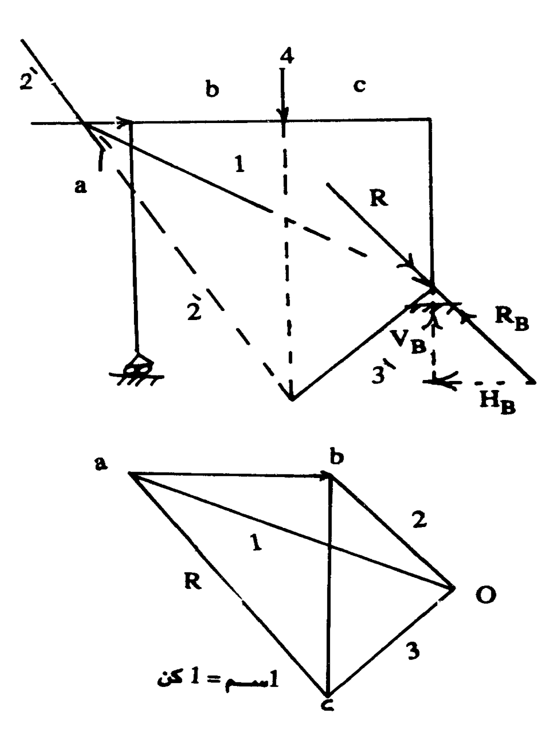
$$\vec{F_4} = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{J}$$

4.4 – المطلوب إيجاد ردود أفعال الهيكل التالى بيانياً :



الحـــــل :

في هذه المسألة نحاول تقسيم المساحة إلى عدة مناطق كخطوة أولى للحل ، وبعد ذلك نرسم مضلع القوى لنحصل على محصلة القوتين ، ونستكمله إلى مضلع الأشعة القطبية لنحصل على نقطة تأثير تلك المحصلة .



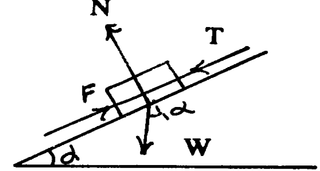
وبعد مضلع الأشعة القطبى نوقع الأشعة على الشكل الأصلى فنجد أن نقطة التقاء أول شعاع `1 وآخر شعاع `3 هى النقطة B ، وبالتالى تكون هى نقطة تأثير المحصلة .

وبما أن الهيكل متزن – فعل ورد فعل – فإن محصلة ردود الأفعال أيضاً يجب أن تمر بالنقطة B ، وهذا غير ممكن لرد الفعل عند A ؛ لأنه رأسى وبالتالى فلابد أن يكون صفراً . ويكون رد الفعل عند B مضاداً فى الاتجاه للمحصلة R ويمكن تحليله أفقياً ورأسياً لإيجاد مركبتيه ونحصل بالقياس على النتائج التالية :

والمركبات تكون : $|\vec{R}| = 5\ KN\ ,\ |\vec{R_B}| = 5\ KN$

$|\vec{V_B}| = 4\ KN \uparrow\ ,\ |\vec{H_B}| = 3\ KN \leftarrow$

5.1 – جسم موضوع على سطح مائل وخشن . وزن هذا الجسم w وهو معرض لقوة F موازية للسطح المائل وتمنع الجسم من الانزلاق . فإذا علم أن $F = W$ وأن معامل الاحتكاك الإستاتيكى للسطح الخشن $\mu = \frac{1}{2}$ أوجد زاوية ميل السطح الخشن على الأفقى فى وضع الاتزان .



الحـــل :

تكون معادلات الاتزان فى هذه الحالة فى اتجاه موازى للسطح وعمودى عليه كما يلى :

$$F_2 = T + W \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$N = W \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

أما معادلة الاحتكاك فتكتب :

$$T = N \tan \phi = N \mu \quad .... \quad (3)$$

من المعادلة الأولى والثالثة نجد :

$$F = N\mu + W \sin \alpha$$

وبالتعويض عن N من المعادلة الثانية :

$$F = W \cos \alpha . \mu + W \sin \alpha$$

$$= W [\mu \cos \alpha + \sin \alpha]$$

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2} \cos \alpha + \sin \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

$$\therefore \text{Sin}^2 \alpha = 1 - \text{Cos} \alpha + \frac{1}{4} \text{Cos}^2 \alpha$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha - \cos \alpha \quad \because \quad \alpha = 36.87°$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha = 1 \quad \longrightarrow \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

5.2 — بالتمرين السابق أوجد قيمة α إذا كانت الزاوية التى تصنعها القوة F مع السطح المائل هى 30° .

أوجد كذلك α إذا كانت : $F = 0,9 W$.

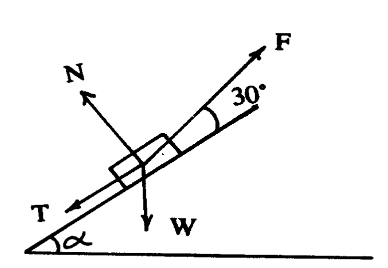
الحـــــل :

فى هذه الحالة تصبح المعادلات (1) , (2) , (3) بالتمرين السابق كما يلى :

$$\ldots 30° = \mu (W \cos\alpha - F \sin 30) + \sin\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$N = W \cos\alpha \ldots\ldots n\,30 \qquad (2)$$

$$T = \mu N \qquad (3)$$



بالمثل – كما حدث في التمرين السابق – يمكن إيجاد المعادلة :

$$F \cos 30° = \mu (W \cos\alpha - F \sin 30) + \sin\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

وحيث إن $F = W$:

$$\cos 30° = \frac{1}{2} (\cos\alpha - \sin 30) + \sin\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1.245 - 1.1\dot{1}6 \cos\alpha + \frac{1}{4}\cos^2\alpha$$

$$\cos\alpha = 0.4464 \pm 0.0572$$

$$\therefore \alpha_1 = 60° . \qquad , \alpha_2 = 67°$$

في حالة ما إذا كانت $F = 0{,}9W$

فإننا نجد من المعادلة (4) بالتعويض عن F بدلالة W

$$0.9\ W \cos 30° = \mu\ (W \cos \alpha - 0.9\ W \sin 30) + W \sin \alpha$$

$$0.779 = \frac{1}{2}\ (\cos \alpha - 0.45) + \sin \alpha$$

$$1 = 0.5 \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

ومنها نحصل على $\alpha = 36.87 \sim$

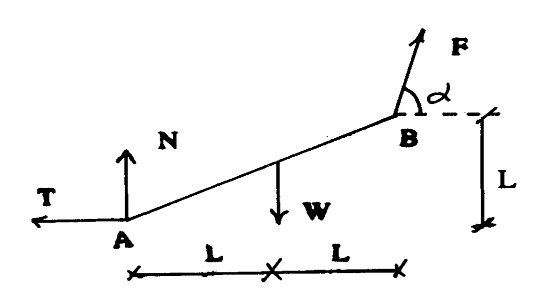
أى نفس القيمة بالتمرين السابق .

5.3 – قضيب وزنه W مشدود من أحد طرفيه بقوة F تميل على الأفقى بزاوية α والطرف الآخر يستند على سطح خشن أفقى . فإذا كان مسقط القضيب فى وضع الاتزان 21 , 1 على الأفقى والرأسى على الترتيب حيث 1 وحدة أطوال . فالمطلوب إثبات أن :

$$\tan \phi = \frac{1}{\tan \alpha - 1}$$

حيث ϕ هى زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن .

استنتج حدود α لكى يتم هذا الاتزان .



الحـــل :
معادلات الاتزان بالنسبة للمحور الأفقى والرأسى تكون :

$$T = F\cos\alpha \quad .... \quad (1)$$

$$N = W - F\sin\alpha \quad .... \quad (2)$$

$$W l = F\sin\alpha\,(2l) - l\,F\cos\alpha$$

$$W = 2F\sin\alpha - F\cos\alpha \quad .... \quad (3)$$

أما معادلة الاحتكاك فهى كالعادة :

$$T = N\tan\phi \quad .... \quad (4)$$

بالتعويض عن T , N من المعادلتين (1) , (2) فى المعادلة (4) نجد :

اما معادلة الاحتكاك فهى كالعادة :

$$T = N\tan\phi \quad .... \quad (4)$$

بالتعويض عن T , N من المعادلتين (1) , (2) فى المعادلة (4) نجد :

$$F\cos\alpha = (W - F\sin\alpha)\tan\phi$$

المعادلة رقم (3) تعطى W بدلالة F ولذلك نعوض فى المعادلة أعلاه فنجد :

$$F\cos\alpha = (2F\sin\alpha - F\cos\alpha - F\sin\alpha)\tan\phi$$

$$\tan\phi = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha - 1}$$

لكى يتم الاتزان فيجب أن يكون رد الفعل N موجباً (لأعلى) أو على أقل تقدير يساوى صفر ويمكن من المعادلة (4) إيجاد :

$$N\tan\phi = T = F\cos\alpha$$

$$N = F\frac{\cos\alpha}{\tan\phi} = F(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

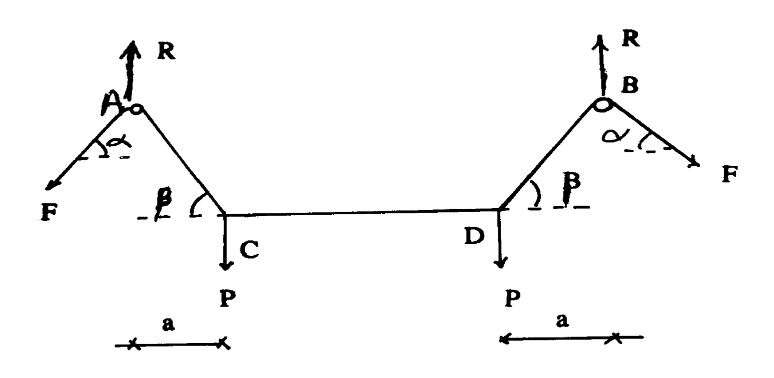
ولكى تكون N موجبة فلابد أن :

$$\sin \alpha > \cos \alpha$$

$$\therefore \quad \alpha \geq 45°$$

6.1 – خيط مربوط إلى مفصلتين A , B فى مستوى أفقى واحد . الخيط مشدود بقوتين F من كل طرف ، وتميل تلك القوة على الأفقى بزاوية α . علق فى الخيط وزنان P فى كل من النقطتين C , D على بعد a عن كل من A , B فأصبح الخيط مائلاً على الأفقى بزاوية β .

المطلوب رد الفعل الرأسى عند كل من المفصلتين . وكذلك العلاقة بين كل من الزاويتين α , β وذلك عندما تكون F = P .



واضح أن الشكل متماثل ولذلك يكون رد الفعل عند كل من B , A متساوى .

فإذا حللنا القوى عند المفصلة A فى اتجاه رأسى نجد أن رد الفعل عند A وهو R يكون :

$$R = P + F \sin \alpha$$

ولإيجاد العلاقة بين كل من الزاويتين α , β ندرس المفصلة C . فإذا حللنا القوى رأسياً عند C نجد أن :

$$P = T_{CA} \sin \beta \rightarrow T_{CA} = \frac{P}{\sin \beta} \text{ .... } (1)$$

حيث T_{CA} هو الشد فى الخيط $\overrightarrow{CA}$.

وبدراسة المفصلة A مرة أخرى ، وإجراء التحليل الأفقى هذه المرة نجد :

$$F \cos \alpha = T_{AC} \cos \beta \text{ .... } (2)$$

وحيث إن :

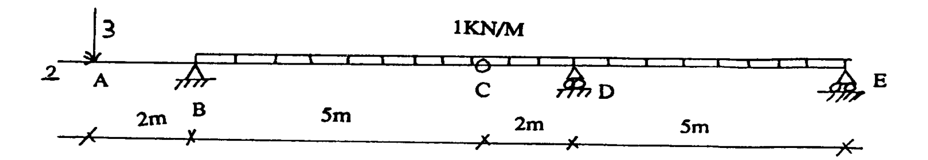
$$T_{CA} = T_{AC} \text{ , } F = P$$

فإن المعادلة (2) تصبح :

$$F \cos \alpha = \frac{F}{\sin \beta} \cos \beta \rightarrow \cos \alpha = \cos \beta$$

وهى العلاقة المطلوبة .

6.2 – أوجد القوى بالمفصلة التى بالكمرة أسفله . أوجد كذلك ردود الأفعال



الحـــــل :

لإيجاد القوى بالمفصلة C نجرى قطع بها وندرس الجزء ABC أسفله .

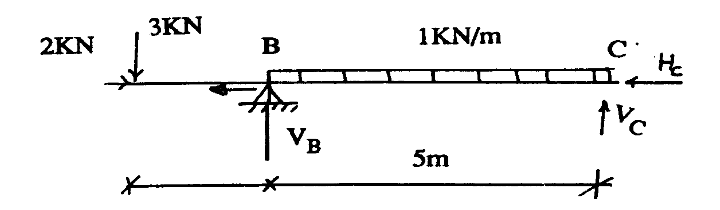
حيث إن الركيزة عند B مزدوجة

فلابد أن يكون لها مركبتين أفقية H_B

ورأسية V_B ومن ثم فإنه بتطبيق

قواعد الاتزان نجد أن : $H_B = 2\ KN \leftarrow$

وبناء على ذلك فإن H_C تكون صفراً . $H_c = 0$



ولإيجاد V_C نحسب العزوم حول B :

$$\sum_{A}^{C} M_B = 0 \rightarrow 3 \times 2 + V_c \times 5 - 1 \times 5 \times 2.5 = 0$$

$$V_C = 1.3\ KN \uparrow$$

ولإيجاد رد الفعل عند B الرأسى V_B يمكن أن نحسب العزوم حول C هذه المرة :

$$\sum_{A}^{C} M_C = 0 \rightarrow 3 \times 2 - V_B \times 5 + 1 \times 5 \times 2.5 = 0$$

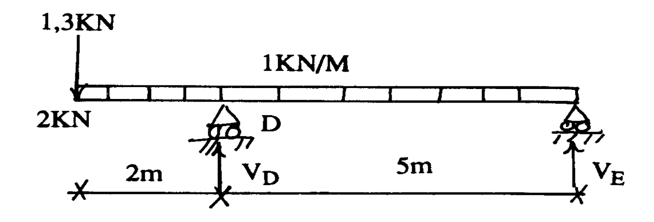
$$\therefore V_B = 6.7 \text{ KN} \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج للجزء ABC :

يجب أن نحقق المعادلة $\Sigma Y = 0$:

$$\Sigma Y = V_B + V_C - 3 - 1 \times 5 = 6.7 + 1.3 - 3 - 5 = 0$$

ولإيجاد بقية ردود الأفعال ندرس الجزء CDE :



$$\sum_{C}^{E} M_D = 0 \rightarrow 5V_E - 1 \times 7 \times 1.5 + 1.3 \times 2 = 0$$

$$\therefore V_E = 1.58 \text{ KN} \uparrow$$

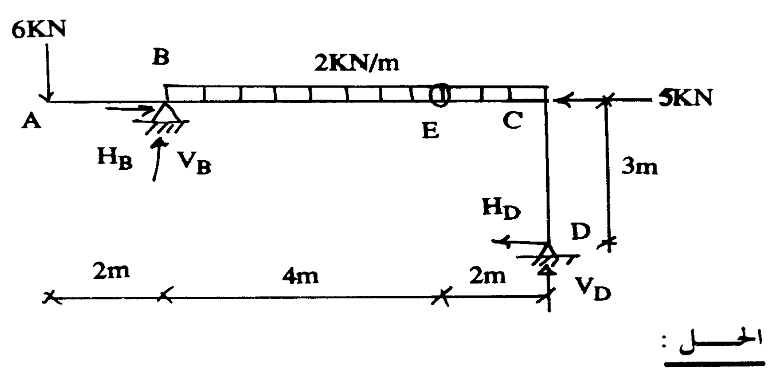
$$\sum_{C}^{E} M_E = 0 \rightarrow 1.3 \times 7 + 1 \times 7 \times 3.5 - 5 V_D = 0$$

$$\therefore V_D = 6.72 \text{ KN} \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج للجزء CDE :

$$\Sigma Y = V_D + V_E - 1.3 - 1 \times 7 = 6.72 + 1.58 - 1.3 - 7 = 0$$

6.3 – أوجد القوى بالمفصلة التى بالهيكل التالى وكذلك ردود الأفعال .



الحـــل :

فى هذه الحالة يمكننا أن نبدأ بإيجاد ردود الأفعال عند B حيث :

$$\sum_{A}^{E} M_E = 0 \rightarrow 6 \times 6 - 4V_B + 2 \times 4 \times 2 = 0$$

$$\therefore V_B = 13 \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum_{A}^{D} M_D = 0 \rightarrow 6 \times 8 - 6V_B - 3H_B + 2 \times 6 \times 3 + 5 \times 3 = 0$$

$$\therefore H_B = 7 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_D = 7 - 5 = 2 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\sum_{D}^{E} M_E = 0 \rightarrow 2V_D - 3H_D - 2 \text{ X } 2 \text{ X } 1 = 0$$

$$\therefore V_D = 5 \text{ KN} \uparrow$$

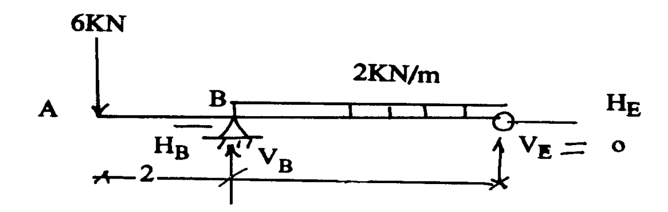
تحقيق صحة النتائج :

$$\Sigma Y = V_B + V_D - 6 - 2 \times 6 = 13 + 5 - 6 - 12 = 0$$

لإيجاد القوى بالمفصلة E يمكننا الآن أن ندرس الجزء ABE :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_E = 7 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_E = 13 - 6 - 2 \times 4 \quad \therefore V_E = 1 \text{ KN} \uparrow$$



6.4 – فى التمرين السابق المطلوب إيجاد موضع المفصلة E بحيث يكون قيمة المركبة الرأسية بها صفراً . أوجد ردود الأفعال فى هذه الحالة .

الحـــــل :

بأخذ العزوم حول B للجزء ABE :

وحيث إن المطلوب هو $V_E = O$.

$$\sum_A^E M_B = 0 \rightarrow X V_E - 2 \times \frac{x^2}{2} + 6 \times 2 = 0$$

$$\therefore X^2 = 12 \text{ KN} \rightarrow X = 3.464 \text{ m}$$

$$V_B = \sum_A^E F = 6 + 2 \times 3.464 = 12.928 \text{ KN} \uparrow$$

وتكون قيمة رد الفعل الرأسى عند D من الاتزان الرأسى للشكل كله :

$$V_D = 6 + 2 \times 6 - 12.928 = 5.072 \text{ KN} \uparrow$$

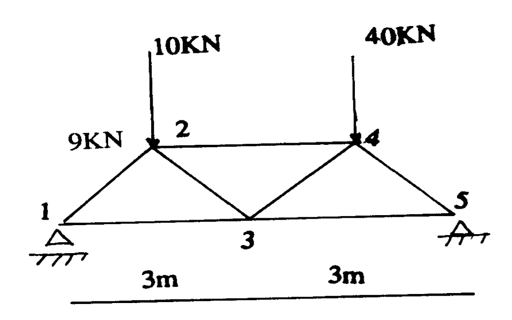
ولإيجاد ردود الأفعال الأفقية عند كل من D , B نحسب العزوم حول D لكل القوى فنجد :

$$\sum_{A}^{D} M_D = 0 \rightarrow 6 \times 8 - 6V_B - 3H_B + 2 \times 6 \times 3 + 5 \times 3 = 0$$

$$\therefore H_B = 7.144 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_D = 7.144 - 5 = 2.144 \text{ KN} \leftarrow$$

7.1 – أوجد بطريقة تحليلية القوى بقضبان الجمالون بالشكل التالى :



الحـــــل :

ردود الأفعال :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_5 = 9 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\Sigma M_5 = 0 \rightarrow -6 V_1 + 10(4.5) + 10(1.5) - 9(1.5) = 0$$

$$\therefore V_1 = 7.75 \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow -6 V_5 - 10(4.5) - 10(1.5) - 9(1.5) = 0$$

$$\therefore V_5 = 12.25 \text{ KN} \uparrow$$

القوى بالقضبان :

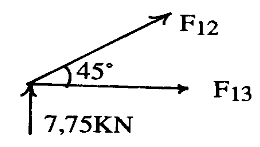
المفصلة (1) :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{12}\frac{1}{\sqrt{2}} + 7,75 = 0$$

$$\therefore F_{12} = -7,75\sqrt{2}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{12}\frac{1}{\sqrt{2}} + F_{13} = 0$$

$$\therefore F_{13} = 7,75$$



المفصلة (2) :

10KN
9KN
F24
F21
F23

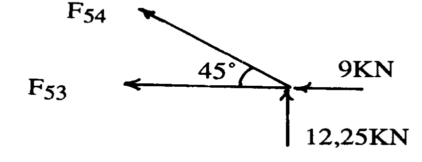
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -10 - \frac{F_{21}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-10 - \frac{1}{\sqrt{2}}(-7.75\sqrt{2}) - \frac{F_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow 9 + F_{24} - \frac{F_{21}}{2} + \frac{F_{23}}{2} = 0$$

$$9 + F_{24} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-7.75\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-2.25\sqrt{2}) = 0$$

المفصلة (5) :



$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 12.25 + \frac{F_{54}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow F_{54} = -12.25\sqrt{2}$$

$$\Sigma x = 0 \rightarrow -9 - F_{53}\frac{F_{54}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow$$

$$9 - F_{53} - \frac{1}{2}(-12.25\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \rightarrow F_{53} = 3.25 \text{ KN}$$

المفصلة (4) :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -10 - \frac{F_{43}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{45}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-10 - \frac{F_{43}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (-12.25 \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore F_{43} = + 2.25 \sqrt{2} \text{ KN}$$

تحقيق صحة النتائج :

ندرس لذلك اتزان المفصلة رقم (3) :

$$\Sigma Y = (F_{34} + F_{32}) / \sqrt{2} = 0$$

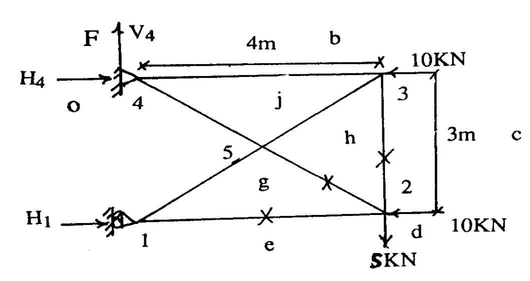
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (+2.25 \sqrt{2} + (-2.25 \sqrt{2})) = 0$$

$$\Sigma X = F_{35} + \frac{F_{34}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{32}}{\sqrt{2}} - F_{31} = 0$$

$$3.25 + \frac{1}{\sqrt{2}} (2.25 \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-2.25 \sqrt{2}) - 7.75 = 0$$

وهو ما يحقق صحة النتائج .

7.2 – عن طريق الحل البيانى أوجد القوى بالجمالون التالى ، ثم حقق النتائج تحليلياً بالنسبة للقضبان المحددة بعلامة X .



الحـــــل :

يبدأ أولاً بتقسيم المناطق وتعيينها ثم بعد ذلك نرسم مضلع القوى (الخارجية + ردود الأفعال) وبعدها ندرس كل مفصلة لتعيين القوى بالقضبان لديها .

ردود الأفعال :

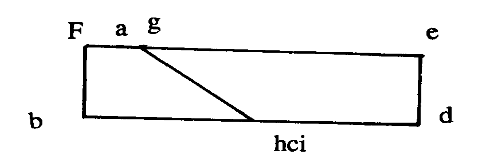
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_4 = 5 \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_4 = 0 \rightarrow 3 H_1 - 10 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore H_1 = \frac{50}{3} \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow 3 H_4 - 10 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore H_4 = \frac{10}{3} \text{ KN} \rightarrow$$



المفصلة	المناطق	القوى	الاتجاه	قيمة القوة ونوعها
①	aega	H1 = Qe ② - ① // eg ③ - ① // ge	تضغط ①	صفير - 16,7 كن
②	edchge	5 = ed 10 = dc ③ - ② // ch ④ - ② // hg ① - ② ge	تشد ②	8,3 كن
③	cbihc	10 = cb ④ - ③ // bi ⑤ - ③ // ih	تضغط ③	- 10,4 كن

تحقيـ ... ـة النتائج تحليلياً للقضبان المحددة بالعلامة X .

المفصلة (1) :

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

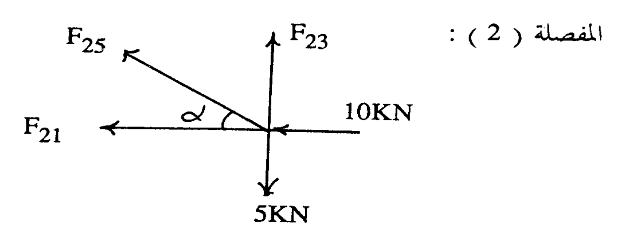
F13

$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{13} \sin \alpha = 0 \rightarrow F_{13} = 0$

α F12

$\Sigma X = 0 \rightarrow H_1 + H_{13} \sin \alpha + F_{12} = 0 \rightarrow F_{12} = -\frac{50}{3}$ KN

المفصلة (2) :



$$\Sigma X = 0 \rightarrow - F_{21} - F_{25} \cos \alpha - 10 = 0$$

$$\therefore F_{25} = [- (- \frac{50}{3}) - 10] \frac{5}{4} \rightarrow$$

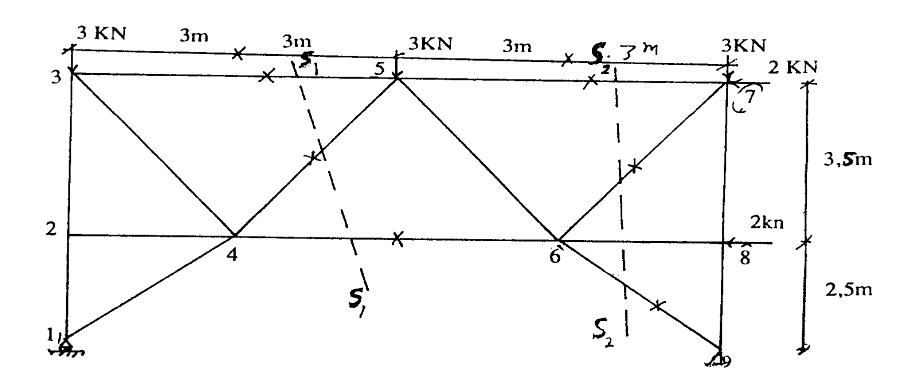
$$F_{25} = \frac{25}{3} \text{ KN}$$

$$F_{25} + F_{23} - 5 = 0 \rightarrow$$

$$\therefore F_{23} = 5 - \frac{25}{3} (\frac{3}{5}) = 0 \text{ KN}$$

وهو ما يحقق صحة النتائج البيانية :

7.3 – أوجد القوى بالقضبان المحدددة بعلامة X فقط فى الجمالون بالشكل التالى :



الحـــــل :

ردود الأفعال :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_9 = 2 + 2 = 4 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma M_9 = 0 \rightarrow 12 V_9 + 2(2.5) + 2(6) - 3(12) - 3(6) = 0$$

$$\therefore V_9 = \frac{37}{12} \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow -12 V_1 + 2(2.5) + 2(6) + 3(12) + 3(6) = 0$$

$$\therefore V_1 = \frac{71}{12} \text{ KN} \uparrow$$

لإيجاد القوى بالقضبان المحددة بعلامة X نلجأ إلى طريقة المقاطع . فندرس القطاع $S_1 - S_1$ وبالتحديد الجزء الأيسر لهذا القطاع :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \frac{71}{12} - 3 + F_{45} \sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha = 0.759 \quad \cos\alpha = 0.651$$

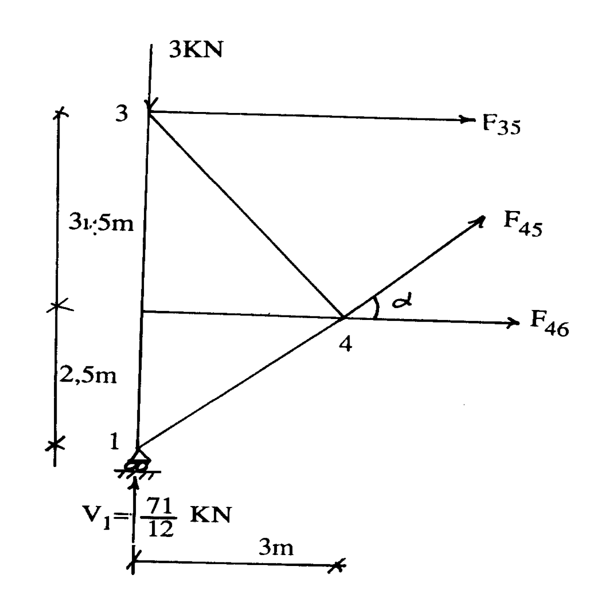
$$F_{45} = \frac{1}{0.759}[3 - \frac{71}{12}] = -2.214 \text{ KN}$$

$$\Sigma M_4 = 0 \rightarrow 3(3) - F_{35}(3.5) - \frac{71}{12}(3) = 0$$

$$F_{35} = -2.5 \text{ KN}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{35} + F_{45}\cos\alpha + F_{46} = 0$$

$$F_{46} = -(-2.5) - (-2.214)\,0.651 = 3.941 \text{ KN}$$



بالنسبة للقضبان الثلاثة الأخرى ندرس المقطع S_2 - S_2 إلا أنه يمر بأربعة قضبان غير معلومة القوى ، وهذا يزيد عن الحد الأقصى المسموع به وهو ثلاثة قضبان ، ولذلك فإنه يجب إيجاد أحدى القضبان قبل دراسة هذا القطاع .

ويمكن إيجاد القوى بالقضيب (8) - (6) بسهولة وذلك واضح من دراسة المفصلة (8) حيث إن القوى بتلك القضيب تكون مساوية للقوة عند المفصلة ومضاده لها في الاتجاه لحدوث الاتزان (انظر الفقرة 7.5) .

$$\therefore F_{8\text{-}6} = -2 \text{ KN}$$

الآن ندرس الجزء على يمين القطاع S_2 - S_2 :

$$\Sigma M_6 = 0 \rightarrow 3\ V_9 + 2.5\ H_9 + 2(3.5)$$

$$- 3\ (3) + F_{75}\ (3.5) = 0$$

$$F_{75} = \left(\frac{1}{3.5} \right) \left[9 - 7 - 25(4) - 3\left(\frac{37}{12} \right) \right]$$

$$\therefore F_{75} = - 4.93\ KN$$

$$\Sigma M_7 = 0 \rightarrow 6\ H_9 - 2(3.5) - F_{86}(3.5)$$

$$- F_{96} \sin \beta\ (6) = 0$$

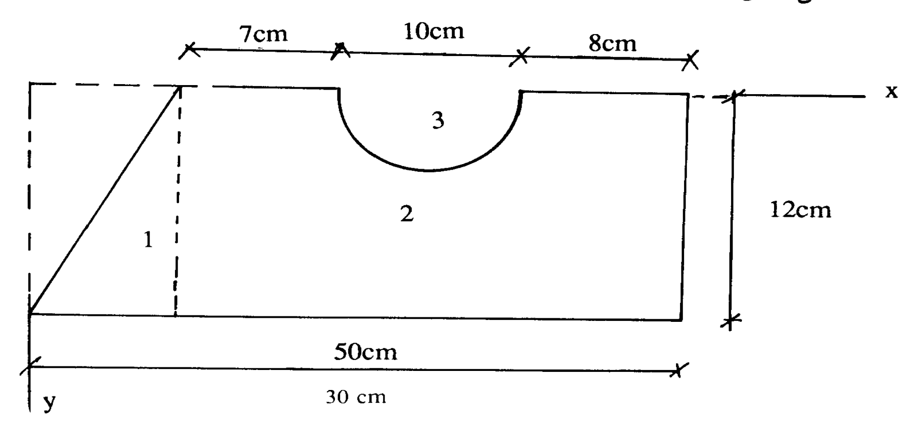
$$\sin \beta = 0.768 \quad , \quad \cos \beta = 0.64$$

$$F_{96} = \frac{1}{6(0.768)} \left[6(4) - 7 - (-2)\ 3.5 \right] = 5.2\ KN$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_9 + F_{96} \cos \beta - F_{76} \sin \alpha - 3 = 0$$

$$F_{76} = \frac{1}{0.759} \left[\frac{37}{12} + 5.2\ (0.64) - 3 \right] = 4.495\ KN.$$

8.1 – المطلوب إيجاد مركز ثقل شبه المنحرف الذى استقطع منه نصف الدائرة بالشكل التالى :



الحـــل :

بأخذ المحاور كما بالشكل ، وبإجراء تقسيم الشكل إلى ثلاث مناطق حيث

المنطقة (1) هى مثلث مساحته = $A_1 = \frac{1}{2}(12x5) = 30$ سم^2

المنطقة (2) هى مستطيل مساحته = $A_2 = 25x12 = 300$ سم^2

المنطقة (3) وهى الجزء المستقطع ، وهو عبارة عن نصف دائرة ولذلك نعتبر أن مساحته سالبة $A_3 = -(5)^2 \frac{\pi}{2} = -39.37$ سم^2

بتطبيق المعادلات (8.3) نجد :

$$X_c = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + (-A_3) X_3}{A_1 + A_2 + (-A_3)}$$

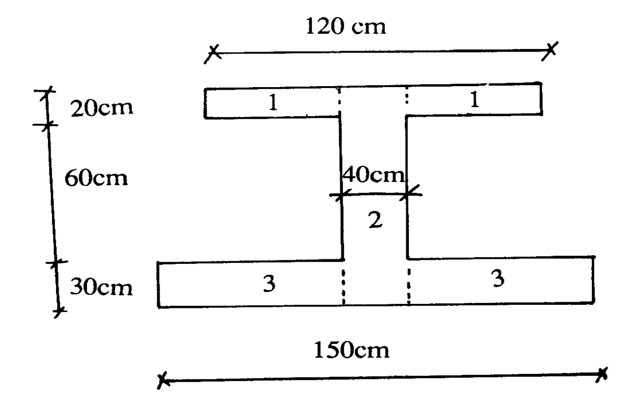
حيث X_3 ، X_2 ، X_1

الإحداثى الأفقى لمراكز ثقل المثلث والمستطيل والدائرة على الترتيب :

$$X_c = \frac{30 \times \frac{2}{3}(5) + 300\left(5 + \frac{25}{2}\right) - 39.27\left(12 + \frac{10}{2}\right)}{30 + 300 - 39.27} = 16.110 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{30 \times \frac{2}{3}(12) + 300\left(\frac{12}{2}\right) - 39.27\left(\frac{4 \times 5}{3\pi}\right)}{30 + 300 - 39.27} = 6.73 \text{ cm}$$

8.2 – أوجد مركز ثقل القطاع على شكل حرف I بالشكل التالى :



الحـــل :

يتضح من تماثل الشكل حول محور رأسى يمر بمنتصفه أن مركز الثقل سيقع على هذا المحور ، ولذلك فالمطلوب فقط هو تحديد ارتفاع أو بعد هذا المركز عن الشريحة العلوية للقطاع (v) .

ونقسم الشكل إلى ثلاثة مستطيلات كما هو موضح ، ونلخص العمل فى الجدول التالى :

	b	h	(b.h)	d	d(b.h)
1	80	20	1600	10	16000
2	40	110	4400	55	242000
3	110	30	3300	95	313500
Σ			9300		571500

$$\nu = \frac{571500}{9300} = 61.45 \text{ cm}$$

8.3 – شكل رباعى ABCD على رؤوسه الأربع الكتل التى قيمها 1,2,3,4 وحدات على الترتيب فإذا علم أن إحداثيات رؤوس الشكل هى :

A(-1,-2,2) , B(3,2,-1) , C(1,-2,4) , D(3,1,2)

أوجد إحداثيات مركز هذه الكتل .

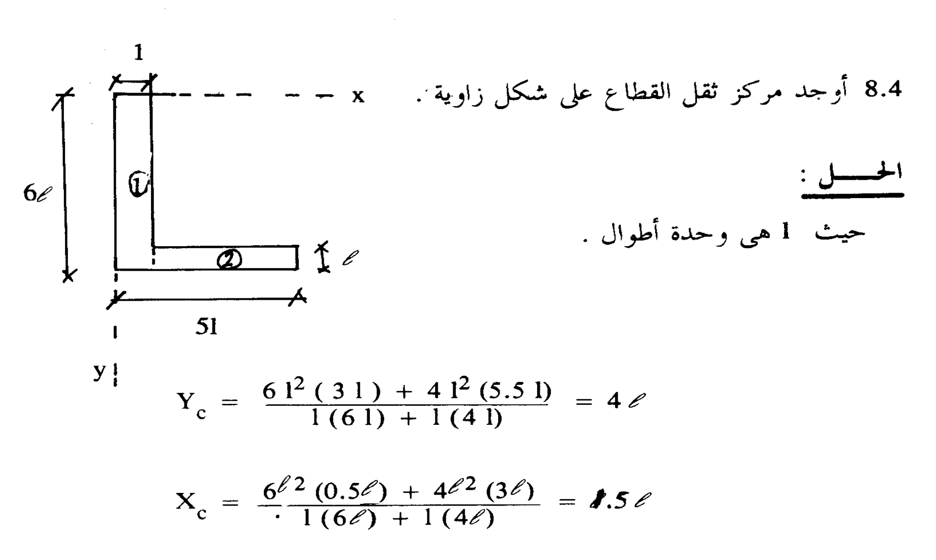
الحـــل :

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{1(-1) + 2(3) + 3(1) + 4(3)}{1 + 2 + 3 + 4} = 2$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{1(-2) + 2(2) + 3(-2) + 4(1)}{1 + 2 + 3 + 4} = 0$$

$$Z_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \; z_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{1(2) + 2(-1) + 3(4) + 4(2)}{1 + 2 + 3 + 4} = 2$$

وبالتالى تكون إحداثيات مركز الكتلة : $(2 , 0 , 2)$



8.4 أوجد مركز ثقل القطاع على شكل زاوية .

الحـــل :

حيث l هى وحدة أطوال .

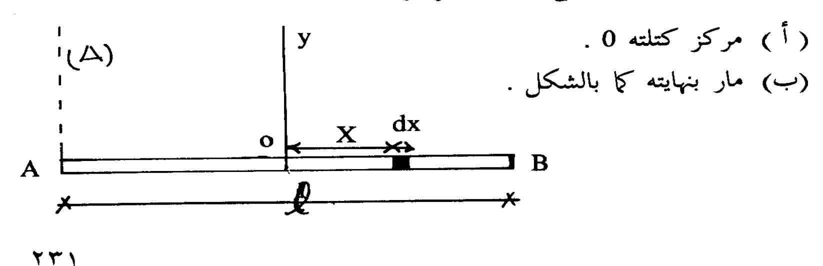
$$Y_c = \frac{6\, l^2 \,(3\, l) + 4\, l^2\, (5.5\, l)}{l\,(6\, l) + l\,(4\, l)} = 4\ell$$

$$X_c = \frac{6\ell^2\,(0.5\ell) + 4\ell^2\,(3\ell)}{1\,(6\ell) + 1\,(4\ell)} = 1.5\,\ell$$

9.1 – أحسب عزم القصور الذاتى لقضيب منتظم ومنتجانس طوله l وكتلته M وذلك بالنسبة لمحور عمودى على القضيب ومار

(أ) مركز كتلته 0 .

(ب) مار بنهايته كما بالشكل .



الحـــل :

(أ) باعتبار العنصر dx على بعد x من المحور الرأسى oy والذى كتلته dm حيث :

$$dm = dx \cdot \lambda$$

ويكون عزم القصور الذاتى للقضيب بالنسبة للمحور oy :

$$I_{yy} = I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 dx = 2\lambda \int_0^{l/2} x^2 dx = 2\lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{l/2}$$

$$I_{yy} = \frac{2\lambda l^3}{24} = \frac{\lambda l^3}{12}$$

$$\therefore \lambda = \frac{M}{l}$$ حيث λ هى الكثافة الطولية :

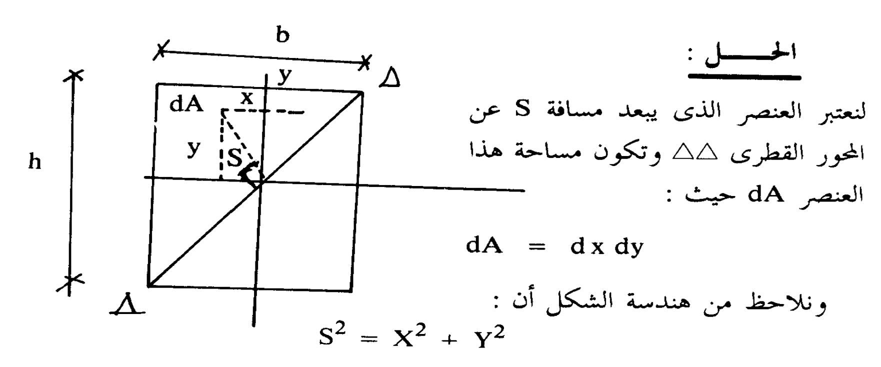
$$I_{yy} = \frac{M l^2}{12}$$

(ب) أما بالنسبة للمحور △ فإننا نستعمل نظرية المحاور المتوازية .

$$I_{\triangle\triangle} = I_{yy} + M \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\triangle\triangle} = \frac{M l^2}{12} + M \frac{l^2}{4} = \frac{M l^2}{3} = I_A$$

9.2 – أحسب عزم القصور الذاتى لمستطيل bxh وذلك حول أحد أقطاره (△△) .



الحـــل :

لنعتبر العنصر الذى يبعد مسافة S عن المحور القطرى △△ وتكون مساحة هذا العنصر dA حيث :

$$dA = dx\, dy$$

ونلاحظ من هندسة الشكل أن :

$$S^2 = X^2 + Y^2$$

$$\because I_{\triangle\triangle} = \int_A S^2 \, dA = \int_A (x^2 + Y^2)\, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A Y^2 \, dA$$

$$\because I_{\triangle\triangle} = I_{yy} + I_{xx}$$

ويمكن أن نستفيد من نتائج المثال الأول بالفصل التاسع حيث وجدنا أن :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{\triangle\triangle} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{A}{12}(h^2 + b^2)$$

حيث A هى مساحة المستطيل .

9.3 – أوجد عزم القصور الذاتى للمكعب حول أحد أحرفه علماً بأن طول الحرف هو a .

الحــــل :

نفرض أن الحرف المراد إيجاد عزم القصور الذاتى حوله هو موازى للمحور الرأسى oy وهو بالتالى يبعد عنه مسافة مقدارها $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ حيث إن المحور oy يكون مار بمركز المكعب .

من تعاريف عزم القصور الذاتى نجد أن هذا العزم حول المحور oy (المعادلة 9.3) .

$$I_{yy} = \int\int (z^2 + X^2)\, dx\, dz$$

$$= \int\int Z^2 \, dx dz + \int\int x^2 \, dx dz$$

$$I_{yy} = \frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{6}$$

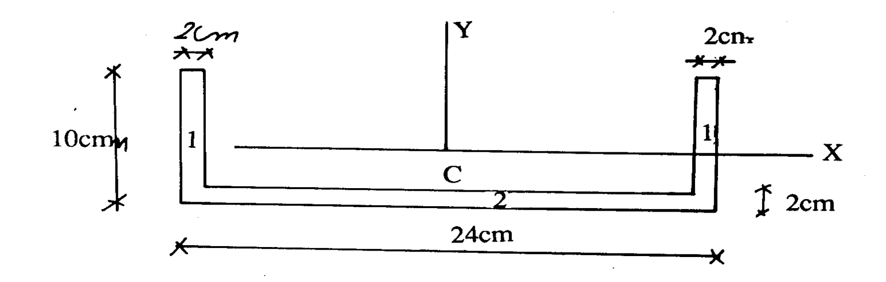
$$= \frac{\alpha^4}{3} + \alpha^2 \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\alpha^4}{3}$$

بإستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد أن عزم القصور الذاتى حول الحرف △△ يكون :

$$I_{\triangle\triangle} = I_{yy} + A'\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^4}{3} + a^2 \frac{a^2}{2} = \frac{2a^4}{3}$$

9.4 – أحسب عزم القصور الذاتى ونصف قطر القصور الذاتى للقطاع بالشكل التالى ، وذلك بالنسبة لمحور أفقى مار بمركز ثقل الشكل :



الحـــل :

من التماثل حول المحور الرأسى المار بمنتصف الشكل سيكون مركز الثقل عليه ، وبالتالى فالمطلوب فقط هو تعيين موضعه الرأسى ، وذلك قبل الشروع فى حساب عزم القصور الذاتى .

نقسم الشكل إلى مستطيلات كما هو موضح ونجرى كل العمليات بالجدول التالى :

	b	h	bh	d	d(bh)	s(b.h)	s^2(b.h)	(bh)s^2
1	2x2	10	40	5	200	2	160	1000 /3
2	20	2	40	9	360	2	160	160 / 3
Σ			80		560		320	1160 / 3

$$\nu = \frac{d\,(bh)}{bh} = \frac{560}{80} = 7 \text{ cm}$$

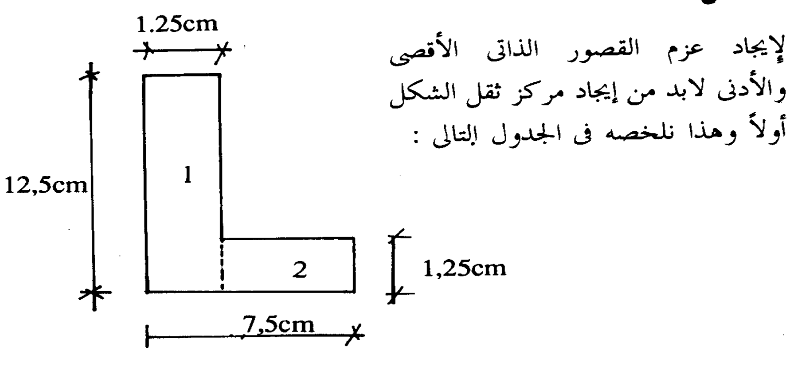
$$I_{xx} = \Sigma\, S^2\,(b.h) + \Sigma\, \frac{bh^3}{12} = 330 + \frac{1160}{3} = \frac{2120}{3} \text{ cm}^4$$

$$r_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{\Sigma\, bh}} = \sqrt{\frac{2120/3}{80}} = 2.972 \text{ cm}$$

9.5 – أوجد عزوم القصور الذاتى القصوى والدنيا للشكل التالى . أوجد كذلك اتجاهات المحاور التى تقع عليها .

الحـــل :

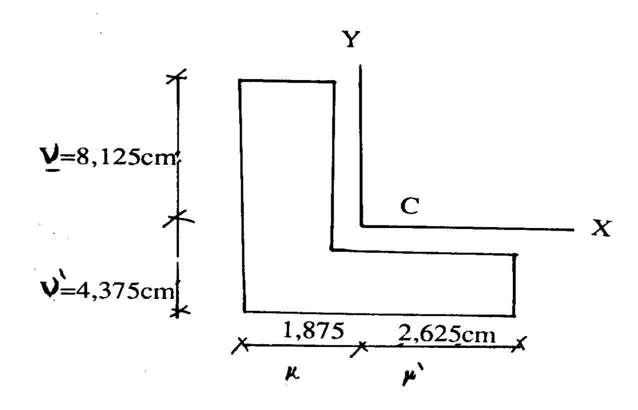
لإيجاد عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى لابد من إيجاد مركز ثقل الشكل أولاً وهذا نلخصه فى الجدول التالى :



	b	h	b . h	d	d(bh)	d`	d`(bh)
1	1,25	12,5	15,625	6,25	97,656	0,625	9,7656
2	6,25	1,25	7,8125	11,875	92,773	4,375	43,1797
Σ			23,4375		190,429		43,9453

$$\nu = \frac{190.429}{23.4375} = 8.125 \text{ cm} \quad , \quad \nu = 12.5 - 8.125 = 4.375 \text{ cm}$$

$$\mu = \frac{43.9453}{23.4375} = 1.875 \text{ cm} \quad , \quad \mu = 7.5 - 1.875 = 5.625 \text{ cm}$$



بعد توقيع مركز الثقل كما بالشكل السابق يمكن الآن حساب عزوم القصور الذاتى حول المحاور المارة بمركز الثقل ، وذلك فى الجداول التالية :

	b	h	b . h	S	S(bh)	S`	S`2 (bh)	$bh^3/12$	$bh^3/12$
1	1,25	12,5	15,625	1,875	54,93	-1,25	24,414	203,45	2,0345
2	6,25	1,25	7,8125	3,75	109,86	2,5	48,828	1,02	25,432
Σ			23,4375		164,79		73,242	204,47	27,466

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} + S^2 (bh) = 204.47 + 164.79 = 369.26 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{12} + S^2 (bh) = 27.466 + 73.242 = 100.708 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = (b_1 h_1)(S_1)(S'_1)(S_1) + (b_2 h_2)(S'_2)(S_2)$$

$$= 15,625 (-1,25)(1,875) + 7,8125 (2,5)(-3,75)$$

$$I_{xy} = -109.863 \text{ cm}^4$$

$$I_{max.} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$= \frac{369.26 + 100,708}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{369,26 - 100,708}{2}\right) + (109,863)^2}$$

$$= 234.984 \pm 173.465$$

$I_{max.} = 408.45 \text{ cm}^4$, $I_{min} = 61.52 \text{ cm}^4$

$$\tan 2\alpha = - \frac{I_{xy}}{\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}}$$

$$\tan 2\alpha = - \frac{-109{,}863}{\frac{369{,}26 - 100{,}708}{2}} = 0{,}818$$

$$\therefore \quad 2\alpha_1 = 39{,}29^\circ \quad , \quad 2\alpha_2 = 219{,}29^\circ$$

$$\alpha_1 = 19{,}64^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 109{,}645^\circ$$

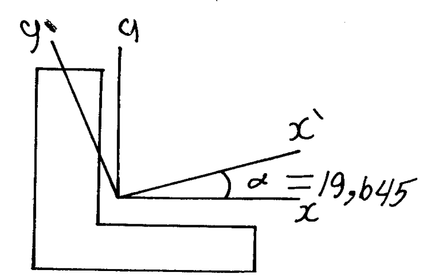
ولمعرفة أى محور يوافق عزم القصور الذاتى الأقصى نعوض فى المعادلة :

$$I = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \text{Cos } 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{369{,}26 + 100{,}708}{2} + \frac{369{,}26 - 100{,}708}{2} \text{Cos } 39{,}29^\circ - (-109{,}863) \text{ Sin } 29{,}29^\circ$$

$$I = 234{,}984 + 103{,}923 + 69{,}57 = 408{,}45 = I_{max}$$

∴ الزاوية 19.645 توافق عزم القصور الذاتى الأقصى .



الفهـــــرس

رقم الإيداع ١٠٣٠٢ / ١٩٩٢م

الترقيم الدولى I.S.B.N. 977 - 00 - 4085 - 1

مطابع الوفاء - المنصورة

شارع الإمام محمد عبده المواجه لكلية الآداب

ت : ٣٤٢٧٢١ - ص.ب : ٢٣٠

تلكس : ٢٤٠٠٤ DWFA UN